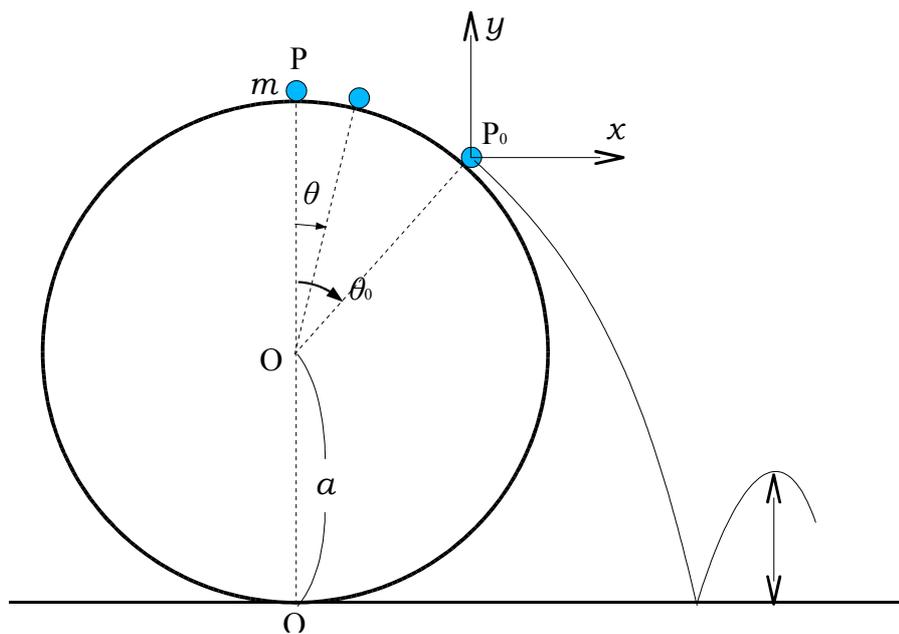


入試問題研究 第84回 2004年 新潟大学 ① 力学(円運動)



図に示す半径 a の滑らかな球面の頂点 P から、質量 m の小さな物体が球面上を初速度 0 で滑り始めた。物体は点 P_0 で球面から離れた後、水平な地表面の点 S に到達し、跳ね返った。球は中心を点 O とし、点 Q で地表に固定されたとする。重力加速度を g とし、以下の問いに答えよ。

問1 図の角度 θ の位置まで滑り降りたときの速さ v を求めよ。

問2 図の角度 θ の位置での球面上の物体に作用する抗力の大きさ R を求めよ。

問3 OP と OP_0 のなす角を θ_0 とし、 $\cos \theta_0$ を求めよ。

問4 図のように点 P_0 を原点とし、 x 軸を水平方向に、 y 軸を鉛直上向きにとる。物体が点 P_0 で球面を離れた瞬間における、速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を a 、 g を用いて表せ。

問5 物体が点 P_0 で離れた瞬間から地表面の点 S に到達するまで時間を求めよ。

問6 点 S に到達する直前における、物体の速度の x 成分 u_x 、 y 成分 u_y を物体が a 、 g を用いて表せ。

問7 物体は点 S で地表に衝突した後、図のように高さ $\frac{2}{3}a$ まではね返った。物体と地表の間のはね返り係数 e を求めよ。

標準的な問題だが、計算力が必須な問題である。設問に従って解いてゆけば最後まで普通の問題である。

- ① 最初は円運動するので、向心力が必要である。
- ② 球面から離れる位置では、球面からの垂直抗力が 0 になるところとすればよい。
- ③ 飛び出してから斜方投射運動である。

入試問題研究 第84回 2004年 新潟大学 ① 力学(円運動)

問1 力学的エネルギー保存則より、 $mg(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$ だから、図の角度 θ の位置まで滑り降りたときの速さ v は $v=\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}$ である。

問2 角度 θ の位置を通過するとき、物体に作用する力は、重力、球面からの垂直抗力である。半径方向成分の和が円運動するための向心力となるから、抗力を R として、それを求めると、 $mg\cos\theta-R=m\frac{v^2}{a}$ より $R=mg\cos\theta-m\cdot 2ga(1-\cos\theta)=3mg\cos\theta-2mga$

だから、球面から受ける抗力は $R=mg\cos\theta-2mga$ である。

問3 P_0 を通過するとき、球面からの抗力がゼロになる。 $0=3mg\cos\theta_0-2mga$ が成立する。すなわち、点 P_0 の位置は $\cos\theta_0=\frac{2}{3}$ を満たす角度 θ_0 下ったところである。

問4 $\cos\theta_0=\frac{2}{3}$ だから、点 P_0 を通過するときの速度 $v_p=\sqrt{2ga(1-\cos\theta_0)}=\sqrt{\frac{2ga}{3}}$ であり、

点 P_0 から飛び出した直後の速度は、水平方向成分が $v_x=\sqrt{\frac{2ga}{3}}\cdot\cos\theta_0=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}}$ 、鉛直

方向成分が $v_y=-\sqrt{\frac{2ga}{3}}\cdot\sin\theta_0=-\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}}$ である。

問5 点 S に到達するまで時間を t とする。地表面の位置は $y=-a(1+\cos\theta_0)=-\frac{5}{3}a$ だから、

等加速度運動の公式より $-\frac{5}{3}a=-\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}}t-\frac{1}{2}gt^2$ が成立する。これを整理して

$$t^2-2\sqrt{\frac{10a}{27g}}\cdot t+\frac{10a}{3g}=0 \text{ だから、}$$

2次方程式の解の公式より $t=-\sqrt{\frac{10}{27}}\sqrt{\frac{a}{g}}\pm\sqrt{\frac{10a}{27g}+\frac{10a}{3g}}=\left(-\sqrt{\frac{10}{27}}\pm\sqrt{\frac{100}{27}}\right)\sqrt{\frac{a}{g}}$ であるが、

時刻 t は正だから、落下時刻は $t=\left(-\sqrt{\frac{10}{27}}+\sqrt{\frac{100}{27}}\right)\sqrt{\frac{a}{g}}=\left(\frac{10-\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{a}{g}}$ である。

問6 x 成分は等速運動だから $u_x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}}$ 、 y 成分は等加速度運動より $u_y=v_y-gt$ だから、

$u_y=-\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}}-g\left(\frac{10-\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{a}{g}}=-\frac{10\sqrt{ga}}{3\sqrt{3}}$ である。

問7 高さ $\frac{2}{3}a$ まではね返るのだから、 $0^2-u_y'^2=2\times(-g)\times\frac{2a}{3}$ だから、衝突直後の鉛直方向の速度は $u_y'=\sqrt{\frac{4ga}{3}}$ である。よって、 $e=\sqrt{\frac{4ga}{3}}\div\frac{10}{3}\sqrt{\frac{ga}{3}}=\frac{6}{10}=0.60$ である。