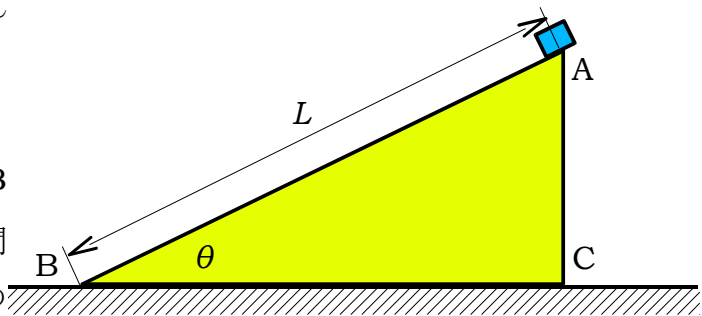


図に示すように、水平な床の上に置かれた質量 M のブロック ABC と、質量 m で大きさが無視できる小物体を考える。

$\angle B$ を θ 、重力加速度を g 、斜面 AB の長さを L とし、小物体とブロックとの間の摩擦力は無視できるとして、以下の

に適当な文字式を入れよ。



[1] まず、ブロックを床に固定した場合を考える。 ※これは簡単だ(基本問題)

点 A に小物体を静かに置くと、小物体は斜面 AB に沿って加速度運動を始める。小物体の斜面 AB 方向の加速度の大きさ α_1 は、 g 、 θ で表せて、 $\alpha_1 = \boxed{(1)}$ となる。小物体がブロックから受ける垂直抗力の大きさ N_1 は m 、 g 、 θ で表せて、 $N_1 = \boxed{(2)}$ となる。

点 A を出発した小物体が点 B に到達するまでの時間 t_1 と、小物体が点 B に到達したときの速度の大きさ v_1 は L 、 g 、 θ で表せて、 $t_1 = \boxed{(3)}$ 、 $v_1 = \boxed{(4)}$ となる。

[2] 次に、床上を自由に動ける状態でブロックが静止している場合を考える。 ※ここからが勝負だ！

点 A に小物体が静かに置くと、小物体は斜面 AB に沿って加速度運動を始める。また、ブロックも小物体から受ける垂直抗力の反作用によって、床上を右に加速度運動する。なお、ブロックと床の間の摩擦は無視できるとする。

小物体がブロックとともに運動する垂直抗力の大きさを N_2 とする。このとき、ブロックの床に対する加速度の大きさ β は、 M 、 N_2 、 θ で表せて、 $\beta = \boxed{(5)}$ となる。

ブロックと共に運動する観測者から見れば、小物体にはブロックの運動方向と逆向きに慣性力が働く。したがって、斜面 AB 方向の運動において、ブロックに対する小物体の加速度の大きさ α_2 は、 g 、 β 、 θ で表せて、 $\alpha_2 = \boxed{(6)}$ となる。また、小物体がブロックから受ける垂直抗力の大きさ N_2 は、 m 、 g 、 β 、 θ で表せて、 $N_2 = \boxed{(7)}$ となる。

[1] ブロックが静止している場合：小物体に働く力は重力が鉛直下向きに mg であり、力を斜面に平行、垂直方向成分に分解する。平行成分が $mg\sin\theta$ 、鉛直成分が $mg\cos\theta$ である。斜面に垂直方向には動かないから垂直成分の力はつりあう。よって、垂直抗力 N_1 は

$N_1 = mg\cos\theta \cdots (2)$ である。斜面に平行な成分で小物体は運動するので運動方程式を作る。

$mg\sin\theta = m\alpha_1$ だから、 $\alpha_1 = g\sin\theta \cdots (1)$ である。等加速度運動の公式より、点 A に

達する時間 t_1 は、 $L = 0 \times t_1 + \frac{1}{2} \times g\sin\theta \times t_1^2$ を満たす。よって、 $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}} \cdots (3)$ であ

る。また、 $v_1^2 - 0^2 = 2 \times g\sin\theta \times L$ より、 $v_1 = \sqrt{2gL\sin\theta} \cdots (4)$ である。ここまでは基本問題だから、解けても当たり前！

[2] ブロックが動く場合：ここからが勝負の場面！最初にブロックの運動方程式を考える。ブロックの動きは水平方向だから、垂直抗力の水平方向成分を求めればよい。右向きに $N_1\sin\theta$ だから、ブロックの運動方程式は $N_2\sin\theta = M\beta$ である。よって、ブロックの加速度は

$$\beta = \frac{N_2\sin\theta}{M} \cdots (5) \text{ である。}$$

次に、ブロックから見た小物体の運動方程式を考える。この場合、慣性力 $-m\beta$ が加わることを忘れないことだ。斜面に平行な力の成分で運動方程式を作ればよい。重力より $mg\sin\theta$ 、慣性力より、 $m\beta\cos\theta$ (どちらも斜面下向き) だから、 $m\alpha_2 = mg\sin\theta + m\beta\cos\theta$ が成立する。よって、 $\alpha_2 = g\sin\theta + \beta\cos\theta \cdots (6)$ である。また、斜面に垂直な方向には動かないので、斜面に垂直な方向の力がつりあう。よって、 $N_2 + m\beta\sin\theta = mg\cos\theta$ が成立する。これより、垂直抗力は $N_2 = mg\cos\theta - m\beta\sin\theta \cdots (7)$ である。

※ 長崎大学の問題はここまでだが... (5)、(6)、(7) では、まだ、解とは言い得ないのだ(互いに未知数を含んでいるため)。

最後まで解いてみよう。以上の3式の未知数は α_2 、 β 、 N_2 の3つである。(7) を (5) に代

入して、 $M\beta = (mg\cos\theta - m\beta\sin\theta)\sin\theta$ だから、 $\beta = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$ である。

$$\beta = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \text{ を(6) に代入すると、 } \alpha_2 = g\sin\theta + \frac{mg\sin\theta\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta} \text{ (} > g\sin\theta \text{) とな}$$

り、台から見た小物体の加速度が求められる。

$$\text{また、(7) に代入すると、垂直抗力が } N_2 = mg\cos\theta - \frac{m^2 g \sin^2\theta \cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \text{ (} < mg\cos\theta \text{) となる}$$

ことがわかる。これより、ブロックを固定した場合より、小物体は斜面台を滑り降りるのが速くなり、垂直抗力は小さくなっていることが分かる。