入試問題研究　第 86 回　2004 年　東京大学　後③　光の性質

「光が空間の点 A から点 B まで進むとき、光は 2 点を結ぶ全ての経路のうち到達時間が最小となる経路を選ぶ」これをフェルマーの定理という。この原理を用いて以下の設問に答えよ。

I　図 1 の点 A から出た光が平面鏡 MM' で反射して点 B に到達するとき、到達するまでの時間が最小になるのはどのような経路か。理由と共に述べよ。

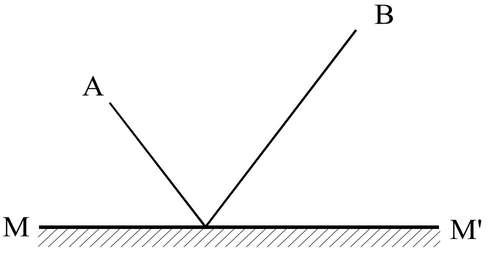


図1

II　図 2 で、空気中の点 A を出発した光が角度 θ でガラスに入射すると、一般にその経路は折れ曲がる（光の屈折）。点 A からガラス中の点 B に到達する光は、図 2 の経路 ACB を進む。空気の屈折率を 1、ガラスの屈折率を n として、入射角 θ と屈折角 ϕ とのあいだにはスネルの法則 $\sin\theta = n\sin\phi$ が成り立つ。スネルの法則に従う経路は光が点 A から点 B に到達する最小時間の経路に一致することを、以下の手順で示せ。

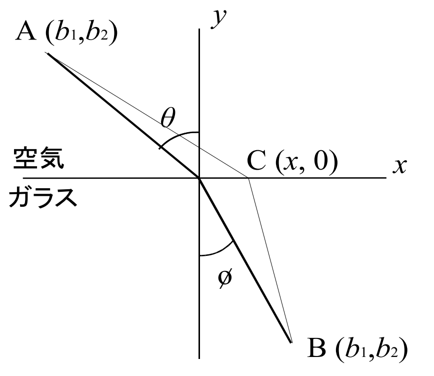


図2

(1)　図 2 のように C を原点とする座標軸をとり、点 A の座標を (a_1, a_2)、点 B の座標を (b_1, b_2) とする。光が経路 ACB を進むのに要する時間 t_0 を求めよ。空気中での光の速さを c とするとき、ガラス中での光の速さは c/n となる。

(2)　光がガラスに到達する地点が原点 C から左右にどちらにずれても、ずれた経路を進むのに要する時間 t は t_0 より長くなる。すなわち、t は原点を通るときに最小値をとる。従って光が原点 C から微小距離（線分 AC や線分 CB の長さに比べて十分短い距離）だけずれた点 C'（座標 $(x, 0)$）を通る経路を進むのに要する時間 t は t_0 にほぼ等しい。このことを用いてスネルの法則を導け。ただし、x^2 を含む項は小さいとして無視してよい。また、δ の絶対値が 1 に比べて十分に小さいとき、$\sqrt{1+\delta} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}\delta$ と近似できる。

III　光が図 3 のような光学装置（レンズ）を通って点 A から点 B にいたる経路を考える。レンズにより、点 A が点 B に結像されるとき、すなわち点 A から出てレンズに入射した光が必ず点 B に到達するとき、点 A から点 B においたる光の到達時間は経路によらず等しい。これもフェルマーの原理に基づいて導かれる光学法則の1つである。

いま、別の光学装置として、図 4 のように点 O を中心とする凹面鏡 MOM' を考える。星から地上に光が届く場合のように点 A が遠方にあるとすると、点 A から出た光はほぼ平行光線となって鏡にやってくる。光線に垂直な面 NN' に同時刻に到着した平行光線が凹面鏡 MOM' に反射して、中心軸 OO' 上の点 B に焦点を結ぶものとする。このとき、線分 BO の長さを b として適当な座標系を設定し、この鏡の形状を現す式を求めよ。

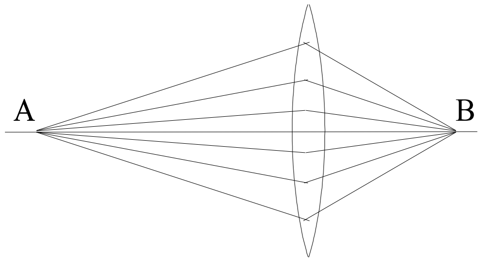


図3

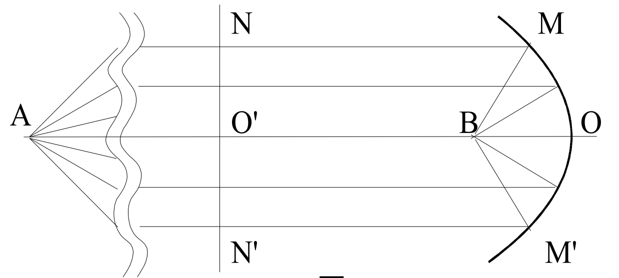


図4

入試問題研究　第86回　2004年　東京大学　後③　光の性質　（解答・解説）

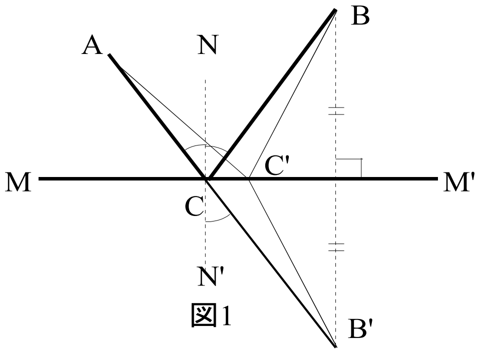


図1

I　速度が同じなので、「距離が最短であれば到達するまでの時間が最小になる」を使えばよい。

図1でBのMM'に対称な点をB'とする。AB'を結ぶ直線とMM'が交わる点をCとする。ACBの経路が最短であることを証明すればよい。

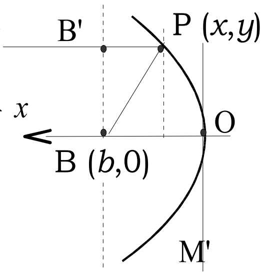
ACBの経路の長さは、CB=CB'（三角形の合同から）だから、ACB'と等しい。C以外の任意の点C'においても同様に、AC'Bの経路の長さはAC'B'と等しくなる。「三角形の2辺の和は他の1辺より長い」ことから、ACB'＜AC'B'である。よって、ACBが最短である。

このとき、∠NCB=∠N'CB'（三角形の合同から）である。また、∠ACN=∠N'CB'より、∠ACN=∠NCBより、「入射角と反射角が等しい」経路が最短時間で到達できる経路である。

II　スネルの法則　$\sin\theta=n\sin\phi$　に従う経路は光が点Aから点Bに到達する最小時間の経路に一致することを、以下の手順で示す。

(1)　$t_0=\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}+\dfrac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c/n}=\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}+\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}$

(2) AC'Bの経路の時間は　$t=\dfrac{\sqrt{(a_1+x)^2+a_2^2}}{c}+\dfrac{n\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{c}$　である。2つの経路の時間差　$t-t_0$　は　$\Delta t=\left(\dfrac{\sqrt{(a_1+x)^2+a_2^2}}{c}-\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}\right)+\left(\dfrac{n\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{c}-\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}\right)$　である。これに近似式　$\sqrt{1+\delta}\simeq 1+\dfrac{1}{2}\delta$　を用いて近似する。最初に、右辺の前半部分から計算してみる　$\sqrt{(a_1+x)^2+a_2^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2a_1x}{a_1^2+a_2^2}}-1\right)=\dfrac{a_1x}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$　になる。同様にして後半部分は　$-\dfrac{nb_1x}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$　である。よって、時間差は　$t-t_0=\dfrac{a_1x}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}-\dfrac{nb_1x}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$　である。問題文中の説明から、その時間はほぼ等しくなることから、$\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\dfrac{nb_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$　が成立するので、　$\sin\theta=n\sin\phi$　が成立していることがわかる。



III　答えは放物面（パラボラ）であることは誰でも知っている（東大受験生なら！）。数学を使って導くことが出来るかどうかである。

左から来た光の経路B'PBとBOBの2つで考えよう。Pの座標（反射面上の座標）を(x,y)とする。同じ時間で到達するので、B'PBの距離がBOBに等しい。よって、　$b-x+\sqrt{(x-b)^2+y^2}=2b$　が成立する。よって、　$y^2=4bx$　となり、放物面（線）であることが分かる。