入試問題研究　第87回　1999年　東京理科大学　③ 波動（光波）

次の文章の空欄の中に入れるべき正しい答えをそれぞれの解答欄に記入しなさい。

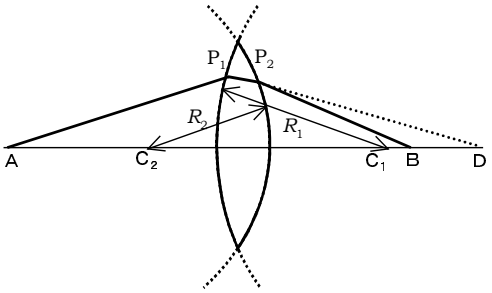
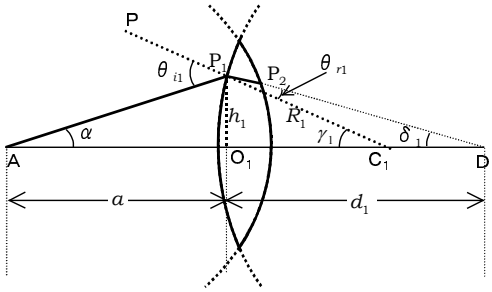


図1のように、点C_1と、点C_2を中心とする半径R_1、R_2の二つの球が交わる形をもち、これらの中心を通る光軸とする薄いレンズがある。

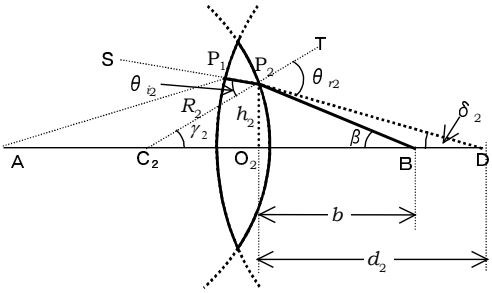
いま、光軸上レンズの前方の点Aに置かれた点光源から発した光線が、この薄いレンズを透過し、光軸上でレンズの後方の点Bに像を結ぶ過程を考える。この過程は



(i)　図2のように、レンズの前方表面上の点P_1に達した光線が、このレンズによって光軸上レンズ後方の点Dに向って屈折される過程

(ii)　図3のように、点Dに向う光線がレンズの後方表面上の点P_2で再び屈折されて、光軸上の点Bに像を結ぶ過程

の二つの過程を合わせたものと見ることが出来る。



以下では、光線の経路AP_1P_2Bが光軸に近い場合（近軸光線）のみを考える。また、レンズの屈折率をn、空気の屈折率1とする。

(1)　まず、(i)の過程について調べる。図2において、点P_1から下ろした垂線と光軸との交点をO_1とし、$AO_1 = a$ [m]、$DO_1 = d_1$ [m]、$P_1O_1 = h_1$ [m]、$\angle P_1AO_1 = \alpha$ [rad]、$\angle P_1DO_1 = \delta_1$ [rad]、$\angle P_1C_1O_1 = \gamma_1$ [rad]とする。また、点P_1への入射角を$\angle AP_1Q = \theta_{i1}$ [rad]（Qを直線C_1P_1の延長上にとる）、屈折角を$\angle C_1P_1D = \theta_{r1}$ [rad]とする。

(a)　入射角θ_{i1}と屈折角θ_{r1}の間には屈折の法則が成り立つ。特に、近軸光線を考えると、θ_{i1}とθ_{r1}はいずれも微小角とみなせるので、これを［（ア）］と表すことが出来る。

(b)　図2より、角α、γ_1、θ_{i1}の間に［（イ）］、角γ_1、δ_1、θ_{r1}の間に［（ウ）］という関係が成り立つ。

(c)　図2より、$\tan\alpha = h_1/a$、$\sin\gamma_1 = h_1/R_1$、$\tan\delta_1 = h_1/d_1$の関係があるが、近軸光線に対しては、これらを$\alpha = h_1/a$、$\gamma_1 = h_1/R_1$、$\delta_1 = h_1/d_1$と近似して読み替えて良い。このとき、3つの長さa、d_1、R_1の間には［（オ）］という関係が成り立つ。

(2)　次に、過程(ii)について調べる。図3において、点P_2から下ろした垂線と光軸の交点をO_2とし、$BO_2 = b$ [m]、$DO_2 = d_2$ [m]、$P_2O_2 = h_2$ [m]、$\angle P_2BO_2 = \beta$ [rad]、$\angle P_2DO_2 = \delta_2$ [rad]、$\angle P_2C_2O_2 = \gamma_2$ [rad]とする。また、点P_2への入射角を$\angle C_2P_2S = \theta_{i2}$ [rad]、屈折角を$\angle BP_2T = \theta_{r2}$ [rad]とする。ただし、点Sおよび、Tはおのおの直線DP_2、C_2P_2の延長上にとる。

(d)　入射角θ_{i2}、屈折角θ_{r2}の間には、［（カ）］の関係が成り立つ。

(e)　問(b)と同様に考えると、3つの角β、γ_2、δ_2の間の関係を求めることが出来る。これより、3つの長さb、d_2、R_2の間には、［（キ）］という関係が成り立つことがわかる。

(3)　薄いレンズを考えれば、その厚さによる効果をすべて無視できるので、問(1)、問(2)における長さd_1とd_2は等しいとみなして良い。このとき、薄いレンズに対しては、光源からレンズまでの距離a [m]、レンズから像までの距離b [m]、および、レンズの焦点距離f [m]の間には$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$という関係が成り立つ。したがって、

(f)　このレンズの焦点距離fはn、R_1、R_2を用いて［（ク）］と表される。

入試問題研究　第87回　1999年　東京理科大学　③ 波動（光波） 解説

東京理科大学　99年度　③

基本となる知識

　屈折の法則（スネルの法則）

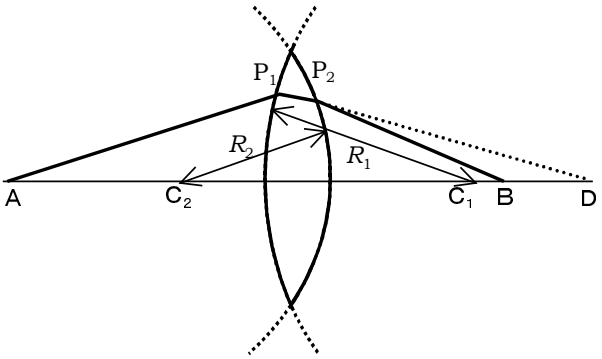
　レンズの公式

　xが微小角のとき　$\sin x = x$ 、$\tan x = x$と近似できること

復習事項

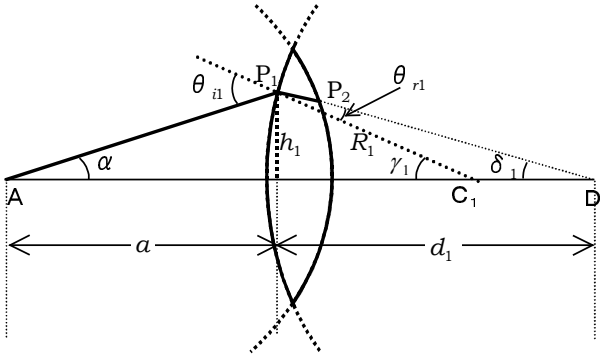
　ホイヘンスの原理

解説



(1)（a）屈折の法則と、入射角、屈折角ともに微小角だから、$n=\dfrac{\sin\theta_{i1}}{\sin\theta_{r1}}=\dfrac{\theta_{i1}}{\theta_{r1}}$ …（ア）である。

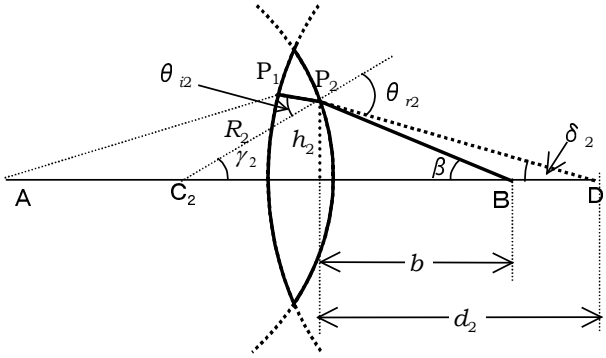
（b）三角形の外角は他の二つの内角の和に等しいので、$\theta_{i1}=\alpha+\gamma_1$ …（イ）同様に　$\gamma_1=\theta_{r1}+\delta_1$ …（ウ）である。以上 3 式よりθを消去すると、$n=\dfrac{\alpha+\gamma_1}{\gamma_1-\delta_1}$ …（エ）になる。



（c）（エ）にそれぞれの近似式を代入して、$n=\dfrac{h_1/a+h_1/R_1}{h_1/R_1-h_1/d_1}$ より、$n=\dfrac{1/a+1/R_1}{1/R_1-1/d_1}$ …（オ）だ。

(2)（d）（a）と同様に、$\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\theta_{i2}}{\sin\theta_{r2}}=\dfrac{\theta_{i2}}{\theta_{r2}}$ …（カ）である。

（e）三角形の外角は他の二つの内角の和に等しいので、$\theta_{i2}=\gamma_2+\delta_2$　および、$\theta_{r2}=\gamma_2+\beta$ であるので、（カ）に代入して、$\dfrac{1}{n}=\dfrac{\gamma_2+\delta_2}{\gamma_2+\beta}$ になる。同様に、$\sin\gamma_2=h_2/R_2$ 、$\tan\beta=h_2/b$ 、$\tan\delta_2=h_2/d_2$ だから、近似式として、$\gamma_2=h_2/R_2$ 、$\beta=h_2/b$ 、$\delta_2=h_2/d_2$ が成立するので、$\dfrac{1}{n}=\dfrac{h_2/R_2+h_2/d_2}{h_2/R_2+h_2/b}$ になるので、$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1/R_2+1/d_2}{1/R_2+1/b}$ …（キ）となる。



(3)（f）$d_1=d_2=d$と考えてよいので、（オ）、（キ）より、$n=\dfrac{1/a+1/R_1}{1/R_1-1/d}$ 、$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1/R_2+1/d}{1/R_2+1/b}$ だから、$\dfrac{1}{a}=\dfrac{n-1}{R_1}-\dfrac{n}{d}$　および、$\dfrac{1}{b}=\dfrac{n-1}{R_2}+\dfrac{n}{d}$　になるのだから、レンズの公式 $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$　に　$\dfrac{1}{a}$ 、$\dfrac{1}{b}$ それぞれを代入して整理し、このレンズの焦点距離　f を求めると、$\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{n-1}{R_1}+\dfrac{n-1}{R_2}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$ だから、焦点距離は　$f=\dfrac{R_1R_2}{(n-1)(R_1+R_2)}$ …（ク）である。