入試問題研究　第88回　　2004年　大分大学　③　光の屈折（フェルマーの原理）

次の文章中の空欄に適当な数式、語句を埋めなさい。

図1に示すように光が媒質ⅠからⅡへ入り込む場合には、進行方向と媒質の境界面の垂線とのなす角を図のように定めると、 $\sin i/\sin r$ の値は一定値となる。この現象は発見者の名をとってスネルの法則といわれている。媒質Ⅰが真空の場合、 $\sin i/\sin r$ の値を媒質Ⅱの絶対屈折率というが、以下、単に屈折率とよぶ。ホイヘンスはこの現象を媒質中での光の速さの変化によるものとして証明した。媒質ⅠとⅡにおける光の速さをそれぞれ v_1 、 v_2 として、上記の比の値は下記の式 $\dfrac{\sin i}{\sin r}=$ (1) で次のように表される。このことは屈折率 n の媒質中では光の速さが真空中の値の (2) 倍になることを意味する。

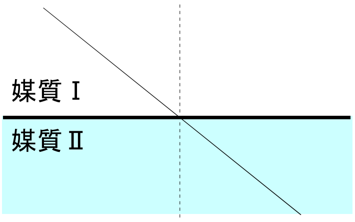

図1

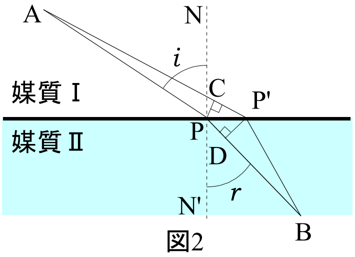

図2

スネルの法則は、まったく別な観点から導くことができる。フェルマーの原理と呼ばれているもので、それは、「一点から他の点にいたる光の経路は所要時間が最短になる経路をとる」と表される。
以下では、このフェルマーの原理とスネルの法則の関係を検討してみよう。

図2に示すように。光線が媒質Ⅰ中のA点から発して媒質中のB点に至る場合において、その所要時間が最短となる経路を求めてみる。その際、媒質の境界面上に近接した2点P、P'をとり、その2点を通る経路を比較することによって考えてみる。PP' = Δx として、 Δx はAB間の距離に比べて非常に小さいものとする。直線NN'はP点を通る境界面の垂線であり、∠APN= i 、∠BPN'= r と定める。P点から直線AP'に垂線PCを下し、またP'点から直線PBを垂線PDを下ろす。真空中での光の速さを c とし、媒質Ⅰの屈折率を n_1 、媒質Ⅱの屈折率を n_2 として、 $n_1<n_2$ とする。

最初に適当な位置にP点をとり、PとP'を通る場合の所要時間の差を表す式を求めよう。光線がP'を通る場合は、Pを通る場合と比べて媒質Ⅰを通過する距離が長くなり、その長さの変化はCP'で近似できる。 Δx が小さいことから∠CPP' ≒ i としてCP'を Δx を用いて表すと、CP' = (3) [m] である。媒質Ⅰの中での光の速さは (4) [m/s] であるので、光がCP'を通過するのに要する時間は (5) [s] となる。一方、媒質Ⅱの中では光線の通過する距離は短くなり、その長さの変化はPDで近似できる。光がPDを通過するのに要する時間を考慮して、先の媒質Ⅰの場合とあわせて考えると、光線が経路AP'Bを通る場合とAPBを通る場合の所要時間のの差 Δt は下記の式で表される。

$$\Delta t=(\text{経路AP'Bの所要時間})-(\text{経路APBの所要時間})=\frac{\Delta x}{c}\times \boxed{(6)}$$

この式は、任意の位置のP点で成立する。

次に $i=r$ の位置にP点をとる。この場合、光線の経路の長さAP ＋ PBは最短であるが、媒質中では光の速さが変化するため、所要時間は最短とはならない。このことは Δt の符号を考慮すると理解できる。 $i=r$ の場合には Δt の値は (7) であり、それゆえ光線がPを通るよりもP'を通る方が所要時間が (8) 。よって光線はAからBへ直進するよりも屈折する方が (9) 時間でBに到達することになる。以下、P点とP'点を移動させながら所要時間が最短となる経路を探してみよう。

Δx を小さな値に保ったまま、P、P'点を $i=r$ の位置から右側へ移動させると、 i は大きくなり、 r は小さくなる。これに伴い Δt の値も変化するが、 $\sin i/\sin r=$ (10) となるPの位置で Δt はゼロとなり、それよりもP点が右へ移動すると Δt は (11) となる。それゆえ光線の経路が $\sin i/\sin r=$ (12) を満足するとき、光がAからBへ至る時間は最短となり、結局フェルマーの原理からスネルの法則と同じ結論が得られることになる。

入試問題研究　第88回　　2004年　大分大学　③　光の屈折（フェルマーの原理）

図1に示すように光が媒質ⅠからⅡへ入り込む場合には、進行方向と媒質の境界面の垂線とのなす角を図のように定めると、$\sin i/\sin r = n$（スネルの法則）が成立する。媒質Ⅰが真空の場合、n の値を媒質Ⅱの絶対屈折率というが、単に屈折率とよぶ。

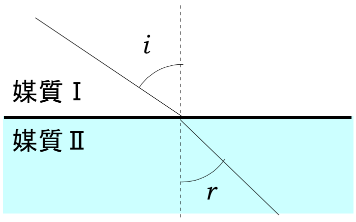

図1

ホイヘンスはこの現象を媒質中での光の速さの変化によるものとして「素元波」という概念を導入して証明した。

媒質ⅠとⅡにおける光の速さをそれぞれ v_1 、v_2 とすると、上記の比の値は $\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}$ ・・・(1) となり、屈折率 n の媒質中では光の速さが真空中の値の $\dfrac{1}{n}$ ・・・(2) 倍になることを意味する。

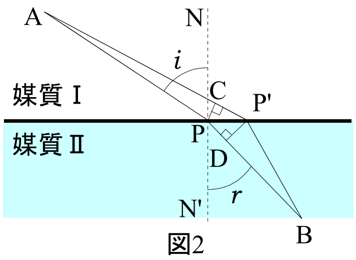

図2

スネルの法則は、まったく別な観点からも導くことができる。「フェルマーの原理」と呼ばれるもので、それは、**「一点から他の点にいたる光の経路は所要時間が最短になる経路をとる」** と表される。

図2に示すように。光線が媒質Ⅰ中のA点から発して媒質中のB点に至る場合において、媒質の境界面上に近接した2点P、P'をとり、その2点を通る経路を比較することによって考えてみる。

PP' = Δx として、Δx はAB間の距離に比べて非常に小さいものとする。直線NN'はP点を通る境界面の垂線であり、∠APN= i 、∠BPN'= r と定める。P点から直線AP'に垂線PCを下し、またP'点から直線PBを垂線PDを下ろす。真空中での光の速さを c とし、媒質Ⅰの屈折率を n_1 、媒質Ⅱの屈折率を n_2 として、$n_1<n_2$ とする。

最初に適当な位置にP点をとり、光線がP'を通る場合は、Pを通る場合と比べて媒質Ⅰを通過する距離が長くなり、その長さの変化はCP'で近似できる。Δx が小さいことから∠CPP' ≒ i としてCP'を Δx で表すと、CP' = $\Delta x\cdot\sin i$ ・・・(3) [m] になる。媒質Ⅰ中の光の速さは $\dfrac{c}{n_1}$ ・・・(4) [m/s] であるので、光がCP'を通過する時間は $\dfrac{n_1\Delta x\cdot\sin i}{c}$ ・・・(5) [s] だけ長くなる。一方、媒質Ⅱ中を通過する距離は短くなり、その長さの変化はPD $=\Delta x\cdot\sin r$ と近似でき、PDを通過するのに要する時間は $\dfrac{n_2\Delta x\cdot\sin r}{c}$ だけ短くなる。二つの場合とあわせて考えると、光線が経路AP'Bを通る場合とAPBを通る場合の所要時間のの差 Δt は下記の式で表される。

$$\Delta t=(\text{経路AP'Bの所要時間})-(\text{経路APBの所要時間})=\frac{\Delta x}{c}\times(n_1\cdot\sin i-n_2\cdot\sin r)\quad\cdots(6)$$

次に $i=r$ の位置にP点をとる。この場合、光線の経路の長さAP ＋ PBは最短であるが、所要時間は最短とはならない。このことは Δt の符号を考慮すると理解できる。$i=r$ の場合には Δt の値は「負」・・・(7) であり、それゆえ光線がPを通るよりもP'を通る方が所要時間が「より短い」・・・(8) 。よって光線はAからBへ直進するよりも屈折する方が「より短い」・・・(9) 時間でBに到達できることがわかる。

Δx を小さな値に保ったまま、P、P' 点を $i=r$ の位置から右側へ移動させると、i は大きくなり、r は小さくなる。これに伴い Δt の値も変化するが、$\sin i/\sin r=\dfrac{n_2}{n_1}$ ・・・(10) となるPの位置で Δt はゼロとなり、それよりもP点が右へ移動すると Δt は「正」・・・(11) となる。それゆえ光線の経路が $\sin i/\sin r=\dfrac{n_2}{n_1}$ ・・・(12) を満足するとき、光がAからBへ至る時間は最短となることが分かる。

このことから、フェルマーの原理からも、スネルの法則と同じ結論が得られることになる。