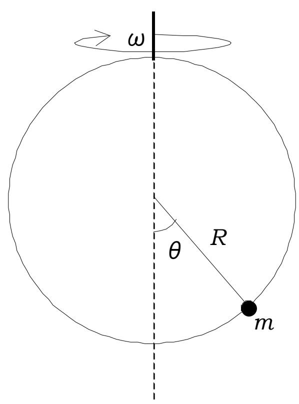
入試問題研究　第89回　2000年　東北大学　前期　　　円運動



半径 R の輪と穴の開いた質量 m の小球がある。小球は輪に通されており、輪に沿って動くことができる。図のように、輪が、中心を通る鉛直な軸の周りに角速度 ω で回転している場合、小球に働く力の釣り合いや小球の運動を、輪と一緒に回転する場合で考える。輪に対する小球の位置は、角度 θ で表すことができる。重力加速度は g とする。以下の問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく考え方および計算の過程も記入しなさい。

(1) 輪と小球の間に摩擦がない場合について考える。

(a) 小球が位置 θ にある場合、小球に働くすべての力について説明しなさい。
さらに、それらの向きを図示しなさい。

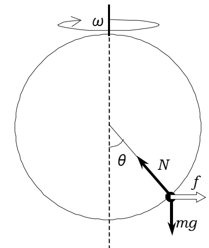
(b) 小球が $\theta=\theta_0$ の位置に止まっている場合、位置 θ_0、半径 R、角速度 ω の間の関係式を求めなさい。
ただし、$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ とする。

(c) 角速度 ω が十分に小さい場合は、小球は $\theta=\theta_0$ を中心とする振幅の小さな単振動をした。その単振動の周期を求めなさい。ここで、θ は十分に小さいとして、近似式 $\sin\theta\cong\theta$、$\cos\theta\cong1$ を用いなさい。

(2) 輪と小球の間に摩擦がある場合を考え、静止摩擦係数を μ とする。小球が $\theta=\frac{\pi}{4}$ の位置に止まっているとする。
角度 ω を徐々に変えた場合、小球が動き出すときの角速度を求めなさい。

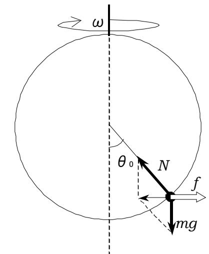
入試問題研究　第89回　200年　東北大学　前期　　円運動　　解説

(1) 輪と小球の間に摩擦が働かない場合

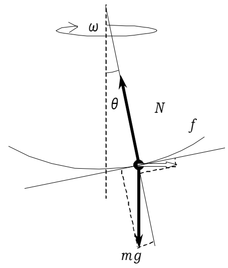


(a) 摩擦がないので輪の円周に沿った向きの力は働かず、輪から受ける小球の力は垂直抗力のみ。小球が輪から受ける垂直抗力 N、重力 mg、遠心力 $f=m(R\sin\theta)\omega^2$ である。

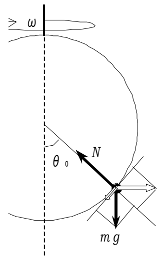
(b) 小球が止まっているのだから、小球に働く垂直抗力と重力と小球の遠心力とが釣り合う。したがって、小球が輪から受ける垂直抗力を N、重力を mg すると、右の図より、遠心力 $f=mR\omega^2\sin\theta_0=mg\tan\theta_0$ より、$R\omega^2\sin\theta_0=g\tan\theta_0$ より、$\cos\theta_0=\dfrac{g}{R\omega^2}$ である。また、小球が輪から受ける垂直抗力は　$N=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$ である。



(c) 角速度が小さいとき、$\dfrac{g}{R\omega^2}>1$ だから、輪の途中で静止するための条件 $\cos\theta_0=\dfrac{g}{R\omega^2}$ を満たすことができなくなる。$\omega<\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ のとき、$\theta=0$ が釣り合いの位置になる。最下点から x ずれた位置での力を考える。このときの角度は $\theta=\dfrac{x}{R}$ と表すことができる。遠心力の円周方向成分は $m\omega^2R\sin\theta\cdot\cos\theta$ であり、重力の円周方向成分は $-mg\sin\theta$ だから、小球の円周方向の運動方程式は $m\omega^2R\sin\theta\cdot\cos\theta-mg\sin\theta=ma$ である。$\theta=\dfrac{x}{R}$ を代入し、角度 θ が小さいので、$m\omega^2R\cdot\dfrac{x}{R}-mg\cdot\dfrac{x}{R}=ma$ だから、$a=-\dfrac{g-\omega^2R}{R}\cdot x$ になる。したがって、小球は角振動数 $\omega'=\sqrt{\dfrac{g-\omega^2R}{R}}$ の単振動である。したがって、小球の単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g-\omega^2R}}$ である。



(2) 回転が速くなると小球は上に滑ろうとするので、そのときの摩擦力は円周下向きである。



遠心力は $f=mR\omega^2\sin\theta$ より、遠心力の円周上向き方向成分は $mR\omega^2\sin\theta\cos\theta$、半径方向外向き成分は $mR\omega^2\sin\theta\sin\theta$ である。同様に、重力の円周上向き方向成分は $-mg\sin\theta$、半径方向外向き成分は $mg\cos\theta$ になる。半径方向成分は垂直抗力とつりあうので、垂直抗力は $N=mR\omega^2\sin\theta\sin\theta+mg\cos\theta$ より、$\theta=45°$ だから、最大摩擦力は $F_0=\mu N=\dfrac{mR\omega^2+\sqrt{2}mg}{2}$ である。また、小球が輪を上ろうとする力は、$f_1=mR\omega^2\sin\theta\cos\theta-mg\sin\theta=\dfrac{mR\omega^2-\sqrt{2}mg}{2}$、輪を下ろうとする力は $f_2=mg\sin\theta-mR\omega^2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}mg-mR\omega^2}{2}$、小球位置は最大摩擦力は $F_0=\dfrac{mR\omega^2+\sqrt{2}mg}{2}$ である。

輪を上に滑り出すのは、上に登ろうとする力 f_1 が最大摩擦力 F_0 より大きくなるときだから、$f_1=\dfrac{mR\omega^2-\sqrt{2}mg}{2}>F_0=\mu\dfrac{mR\omega^2+\sqrt{2}mg}{2}$ より、$mR\omega^2-\sqrt{2}mg>\mu(mR\omega^2+\sqrt{2}mg)$ である。

したがって、$(1-\mu)mR\omega^2>(1+\mu)\sqrt{2}mg$ より、$\omega>\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}(1+\mu)g}{(1-\mu)R}}$ である。

輪を下に滑り出すのは、下に降りようとする力 f_2 が最大摩擦力 F_0 より大きくなるときだから、$f_2=\dfrac{\sqrt{2}mg-mR\omega^2}{2}>F_0=\dfrac{mR\omega^2+\sqrt{2}mg}{2}$ だから、$\sqrt{2}mg-mR\omega^2>\mu(mR\omega^2+\sqrt{2}mg)$ であるので、$(1+\mu)mR\omega^2<(1-\mu)\sqrt{2}mg$ より、$\omega<\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}(1-\mu)g}{(1+\mu)R}}$ である。