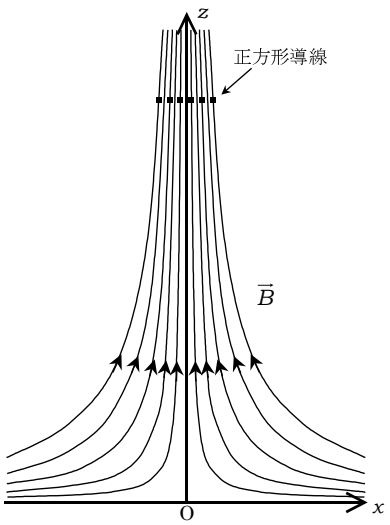
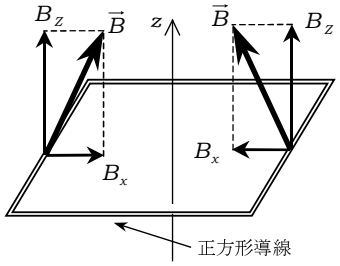
## 入試問題研究　第 90 回　2001 年　東京大学　②　電磁気




図のように、1辺の長さが $L$ の正方形導線が、磁場中を、鉛直上向きにとった $z$ 軸に沿って原点に向かって落下している。この磁場（磁束密度）$\vec{B}$ の $x$ 成分と $z$ 成分は、それぞれ、$B_x = -Cx$、$B_z = Cz$ （$C$ は正の定数）で与えられる。$y$ 成分はゼロである。正方形の面は、$xy$ 平面に平行で、各辺は $x$ 軸または $y$ 軸に並行であり、正方形の中心は $z$ 軸になる。導線は変形しない。導線の質量を $m$、電気抵抗を $R$ とし、導線の太さは無視できるものとする。また、この実験は、真空中で行うものとする。このとき、以下の問いに答えなさい。




**Ⅰ**　落下する導線中には、ファラデーの電磁誘導の法則にしたがって、誘導起電力が発生し、誘導電流が流れる。

(1) 導線が $z$ の位置にあるとき、導線を貫く磁束 $\Phi$ が、$\Phi = L^2 B_x = L^2 Cz$ で与えられることに注意し、誘導電流の向きとして正しいものを、次の(a)、(b)から選び、かつ、その理由を述べなさい。

(a) 正方形を上から見て時計回り

(b) 正方形を上から見て反時計回り

(2) 導線が $z$ の位置にあるときの落下速度の大きさを $v$ とするとき、導線中に生じる誘導起電力の大きさ $V$ と誘導電流の大きさ $I$ を求めなさい。

**Ⅱ**　電流が磁場 $\vec{B}$ から受ける力は、磁場の $x$ 成分と $z$ 成分のそれぞれから受ける力の和として 表すことができる。以下の問いでは、誘導電流の作る磁場は無視してよい。

(1) 誘導電流と $B_x = -Cx$ によって、導線全体が受ける力 $\vec{F}$ の大きさを求めなさい。

(2) 誘導電流と $B_z = Cz$ によって、導線全体が受ける力 $\vec{G}$ の大きさを求めなさい。

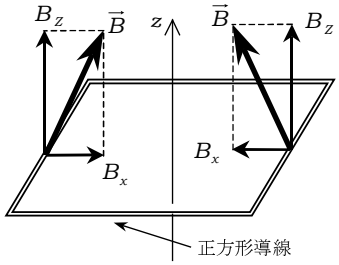
**Ⅲ**　十分に大きな $z$ の位置から落下させた導線の落下速度の大きさは、やがて、ある値 $v_f$ で一定になる。

(1) $v_f$ を求めなさい。ただし、重力加速度の大きさを $g$ とする。

(2) 導線の落下速度が $v_f$ に達した状態において、導線の失う位置エネルギーは何に変わるか、簡潔に述べなさい。

## 入試問題研究　第 90 回　2001 年　東京大学　②　電磁気　解答解説

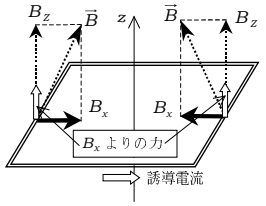
Ⅰ　落下する導線中には、ファラデーの電磁誘導の法則による誘導起電力が発生し、誘導電流が流れる。 誘導電流が受ける磁場からの力はフレミングの左手の法則を使えばよい



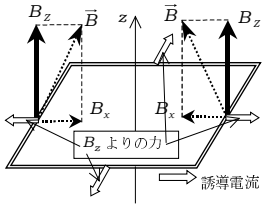

(1) $z$ の位置で導線を貫く磁束 $\Phi$ が $\Phi = L^2 B_x = L^2 Cz$ より、落下するとき $z$ が減少し、貫く磁束が減少する。 電磁誘導の法則より、磁束の変化を妨げる方向に誘導電流が流れるので、誘導電流の向きは「正方形を上から見て反時計回り」 だから (b) である。

(2) 導線が $z$ の位置にあるときの落下速度の大きさを $v$ とするとき、$\Delta t$ 後の位置が $z - v\Delta t$ だから、磁束の変化は $\Delta\Phi = L^2 C(z - v\Delta t) - L^2 Cz = -L^2 Cv\Delta t$ になる。電磁誘導の法則 $V = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ より、導線中に生じる誘導起電力の大きさ は $V = L^2 Cv$ である。 また、オームの法則より、誘導電流の大きさは $I = \dfrac{L^2 Cv}{R}$ である。

Ⅱ　電流が磁場 $\vec{B}$ から受ける力は、磁場の $x$ 成分と $z$ 成分のそれぞれから受ける力を別々に考えればよい。




(1) 右図より、$f = IBl$ の公式より、$\vec{F} = \dfrac{L^2 Cv}{R} \cdot \dfrac{CL}{2} \cdot L \times 2$ だから、磁場からの力は $\vec{F} = \dfrac{C^2 L^4 v}{R}$ （上向き）




(2) 右図より、向かい合う各辺の力が互いに逆向きになるので、導線全体が受ける力は $\vec{G} = 0$

Ⅲ　落下中の運動方程式は下向きを正として $ma = mg - \dfrac{C^2 L^4 v}{R}$ である。 十分時間がたつと加速度の大きさがゼロになり、速度は $v_f$ （終速度）で一定になる。

(1) 運動方程式に十分時間がたったときの条件 $a_f = 0$、$v_f$ を代入して $0 = mg - \dfrac{C^2 L^4 v_f}{R}$ になる。したがって、十分時間がたったときの速度（終速度）は $v_f = \dfrac{mgR}{C^2 L^4}$ である。

(2) 失われる位置エネルギーは、正方形の導線に発生するジュール熱に変わる。

［参考］ $\Delta t$ の間に導線の失う位置エネルギーは $mg \cdot v_f \Delta t = \dfrac{m^2 g^2 R}{C^2 L^4} \cdot \Delta t$、導線に発生するジュールの大きさは $I^2 R\Delta t = \left(\dfrac{L^2 Cv_f}{R}\right)^2 \cdot R \cdot \Delta t = \dfrac{L^4 C^2 {v_f}^2 \Delta t}{R} = \dfrac{m^2 g^2 R}{C^2 L^4} \cdot \Delta t$ であり、両者は当然一致する。