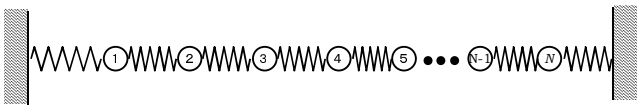
入試問題研究　第 91 回　1999 年　東北大学　前期　①

ばね定数が K で自然長が L_0 のばねが N+1 本ある（N は自然数）。ばねはフックの法則に従い、ばね自体の質量や空気抵抗の影響は無視できるとする。図のように、

N 個の質量 M の小小物体をばねで連結し、摩擦のない水平な床上を動くようにする。最も左のばねの左端と最も右端は壁に固定されており、壁の感覚は $(N+1)L$ である（ $L > L_0$ とする）。左の壁面に原点をもつ x 軸を図のようにとり、N 個の小小物体が x 軸上を運動する場合を考える。以下の問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく、考え方および計算の家庭も示しなさい。



(1) 左から n 番目（n=1,2,3,4,..,N）の小小物体の、つりあいの位置から x 軸正方向への変位を u_n、加速度を a_n としたとき、その小物体の運動方程式は $Ma_n = K(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$ となることを導きなさい。 ただし、$u_0 = 0$、$u_{N+1} = 0$ とする。

N が十分に大きいときの N 個の小小物体の縦波運動を考える。今の場合の進行波の進む速さは、波長 λ に依存して変化する。すなわち、周期 T と λ とは比例関係にない。そこで、T と λ の関係を調べよう。

(2) まず、周期 T で波長 λ の x 軸正方向への進行波 $u_n = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{nL}{\lambda}\right)\right]$ と x 軸負方向への進行波 $u_n = B\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{nL}{\lambda}\right)\right]$ とを考える。 ここで、AとBは定数である。この二つの進行波の重ね合わせによって縦波定常波が生じる。左の壁面が固定端であることを用いて、この定常波が $u_n = A\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ で表されることを示しなさい。

(3) 問(2)の定常波は各小小物体の単振動を表している。これが問(1)の運動方程式を満たすためには、周期 T と波長 λ との間に、ある関係が成り立たねばならない。このときの T を λ、K、L、M を用いて表しなさい。

入試問題研究　第 91 回　1999 年　東北大学　前期　①　解答･解説

基本となる知識

フックの法則

運動方程式

単振動

波の方程式

解説

(1) n 番目の小物体に注目する。左のばね（n-1 番目とつながるばね）は $L-L_0-u_{n-1}+u_n$ 伸びている。このばねから n 番目の小物体が受ける力は $K(L-L_0-u_{n-1}+u_n)$ 左向きである。右のばね（n+1 番目とつながるばね）は $L-L_0-u_n+u_{n+1}$ 伸びている。このばねから n 番目の小物体が受ける力は $K(L-L_0-u_n+u_{n+1})$ 右向きである。したがって、n 番目の小物体の運動方程式は $Ma_n=-K(L-L_0-u_{n-1}+u_n)+K(L-L_0-u_n+u_{n+1})$ であるので、$Ma_n=K(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})$ である。

(2) 両端は固定端だから、n=0 での二つの波の変位は常にゼロだ。よって、$0=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]+B\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]$ だから、$B=-A$ だ。したがって、右に進む波の変位 $u_n=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)\right]$、左に進む波の変位 $u_n=-A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)\right]$ だから、合成波の変位は $u_n=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)\right]-A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)\right]$ である。

和･積変換公式を使って、$u_n=2A\sin\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)+2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)}{2}\right]$ だから、

$u_n=2A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)$ である。これは、$u_n \Rightarrow A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)$ の形になっている。

(3) $Ma_n=K\left[2A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left\{2\pi\frac{(n+1)L}{\lambda}\right\}-4A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)+2A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left\{2\pi\frac{(n-1)L}{\lambda}\right\}\right]$ だ。

変位が $u_n=2A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)$ より、加速度は $a_n=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2u_n=-2A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)$ になる（単振動の公式 $a=-\omega^2x$、$\omega=\frac{2\pi}{T}$ を使用した）ので、この加速度の式を運動方程式に代入して

$-2MA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)=2KA\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\left[\sin\left\{2\pi\frac{(n+1)L}{\lambda}\right\}-2\sin\left(2\pi\frac{nL}{\lambda}\right)+\sin\left\{2\pi\frac{(n-1)L}{\lambda}\right\}\right]$ である。右辺に和･積変換公式を適用し整理すると $2K-M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=2k\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}$ である。これより、周期 T は

$T=\sqrt{\frac{4\pi^2m}{2K\left(1-\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}\right)}}$ となる。半角公式 $\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x$ を分母に適用して、周期は

$T=\sqrt{\frac{\pi^2M}{K\sin^2\pi\frac{L}{\lambda}}}=\frac{\pi}{\left|\sin\pi\frac{L}{\lambda}\right|}\sqrt{\frac{M}{K}}$ と表すことが出来る。