入試問題研究　第92回　2004年　名古屋大学　②　電磁気（電磁誘導）

図1のようにz軸方向に向いた磁場(磁界)に垂直な (x, y) 平面内における電子の運動を考えよう。電子の電荷を $-e$、質量を m として以下の問いに答えよ。ただし $e>0$ とし、電子は真空中を運動する。

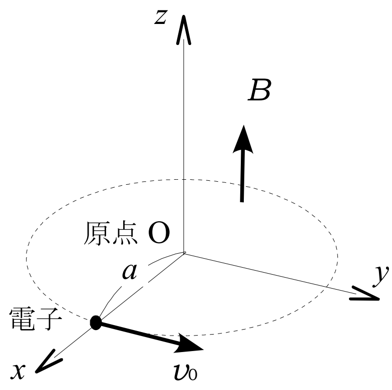

図1

1.　磁場は空間的に一様で、時間に対して一定である。この磁束密度 B の大きさを B_0 とする。

(1) 磁場と垂直に、ある速さ v_0 で入射した電子は、(x, y) 平面内で半径 $a = a_0$ の円を描いた。電子の円軌道の半径 a_0 を、v_0、B_0、e、m を用いて表せ。また、円周を1周するのに要する時間 t を B_0、e、m を用いて表せ。

(2) この円軌道を描く電子は円形電流を作る。1個の電子が作る電流の大きさ I を B_0、e、m を用いて表せ。また、この円形電流が電子の軌道の中心に作る磁場はどの方向を向いているか答えよ。

2.　磁束密度 B が、次のように座標 (x, y) に依存し、時刻 $t<0$ では時間によらず、時刻 $t \geq 0$ では時間とともに増加する場合を考える。この磁束密度を $B(r, t)$ と表す。

$$t<0 \text{ のとき } \quad B(r, t)=b(r) \text{ 、} \qquad t \geq 0 \text{ のとき } \quad B(r, t)=b(r)\left(1+\frac{t}{T}\right)$$

ただし、T は正の定数、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ であり、$b(r)$ は正の値を持ち、r とともに単調に変化するものとする。

$t<0$ のある時刻に速さ v_0 で電子を入射したところ、磁場と垂直な (x, y) 平面内で、原点を中心とする半径 a の円を描いた。$t \geq 0$ になっても、電子は $t<0$ の場合と同じ半径 a の円運動を続けた。以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t \geq 0$ では、半径 a の円を貫く磁束は $\Phi(t)=\phi(a)\left(1+\frac{t}{T}\right)$ で与えられる。ただし、$\phi(a)=2\pi\int_0^a b(r)\,r\,dr$。電子の軌道上に生じる誘導起電力の大きさ $|V|$ を $\phi(a)$、T を用いて表せ。また、この誘導起電力は、電子の運度方向に一定の大きさ $|E|$ を持つ誘導電場(電界)をもたらす。$|E|$ を $\phi(a)$、T、a を用いて表せ。

(2) 誘起された電場によって電子は加速されるか減速されるか理由をつけて答えよ。また、正の時間 t での電子の速さ $v(t)$ を v_0、$|E|$、e、m、t を用いて表せ。

(3) 電子が半径 a の円周上を運動し続けるために必要な条件を a、$B(r, t)$、$v(t)$、e、m を用いて表せ。

(4) 上の問い(3)で求めた条件が任意の正の時間 t で満たされるとすれば、C を定数とする関係式 $\frac{\phi(a)}{\pi a^2}=C\,b(a)$ が成立する。定数 C の値を求めよ。また、このとき、電子の軌道半径内での磁束密度の大きさ $b(r)$ は r の増加と共に増加するか減少するか理由をつけて答えよ。

入試問題研究　第92回　2004年　名古屋大学　②　電磁気（電磁誘導）

この問題は教科書にもある「ベータトロン」と呼ばれる粒子加速器の原理を扱う問題である。途中に、数学の微積分学が登場するが、この程度の微積分に戸惑うようではいけない。この問題の出題者の意図として、実用としての数学力が問われているのだから。前半で点数を確保するのが勝負のポイント。

1.　この問題は基本問題で、満点を目指す部分。勝負は後半の問題にある。

(1) 「ローレンツ力が円運動の向心力となって円運動を行う」を使う、解けて当然の基本問題だ。

$e v_0 B_0 = \frac{m v_0^2}{a_0}$ が成立するから、円軌道の半径は $a_0 = \frac{m v_0}{e B_0}$ である。

また、円周を1周するのに要する時間は円周の長さ $2\pi a_0$ を v_0 の速さで回るので、

$t = \frac{2\pi a_0}{v_0}$ だから、円周を1周するのに要する時間は $t = \frac{2\pi m}{e B_0}$ である。

(2) 電流の定義は1秒間を流れる電気量である。よって、時間 t に流れる電気量は $Q = I t$ だから、$e = I \times \frac{2\pi m}{e B_0}$ が成立する。よって、1個の電子が作る電流の大きさは $I = \frac{e^2 B_0}{2\pi m}$ である。

また、この円形電流が電子の軌道の中心に作る磁場はz軸負の向きである。

2.　入試における勝負問題。微積分法にアレルギーがある人はつらい問題である。

(1) 時刻 $t \geq 0$ では、半径 a の円を貫く磁束は $\Phi(t) = \phi(a)\left(1 + \frac{t}{T}\right)$ で与えられる。ただし、$\phi(a) = 2\pi \int_0^a b(r)\, r\, dr$ 。電磁誘導の法則 $V = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ より、電子の軌道上に生じる誘導起電力の大きさ $|V| = \phi(a)\left(1 + \frac{t}{T}\right)' = \frac{\phi(a)}{T}$ である。また、電界は $E = \frac{V}{d}$ の公式より、電子の運度方向の誘導電場（電界）は $|E| = \frac{V}{2\pi a} = \frac{\phi(a)}{2\pi a T}$ ・・・② である。

(2) 磁束が増加するので、それを打ち消す方向の誘導電流を流す起電力が発生する（レンツの法則）ので、誘起された電場によって電子は加速される。また、そのとき電子は $f = e|E|$ の力を受け等加速度運動を行うので、正の時間 t での電子の速さは $v(t) = v_0 + \frac{e|E|}{m} \cdot t$ ・・・③ である。

(3) 電子が半径 a の円周上を運動し続けるために必要な条件はローレンツ力が向心力となることだから、$e \cdot v(t) \cdot B(a,t) = \frac{m \cdot \{v(t)\}^2}{a}$ であるから、$e \cdot B(a,t) \cdot a = m \cdot v(t)$ ・・・④ になる。

(4) (3)で得た関係式④に、①、②、③を代入して、$e \cdot b(a)\left(1 + \frac{t}{T}\right) \cdot a = m \cdot \left(v_0 + \frac{e \cdot \phi(a) \cdot t}{2\pi a m T}\right)$ になり、任意の t で成立するなら、$e \cdot b(a) \cdot a = m v_0$ ・・・⑤ かつ $\frac{e \cdot b(a) \cdot a}{T} = \frac{e \cdot \phi(a)}{2\pi a T}$ ・・・⑥ が成立するので $\frac{\phi(a)}{\pi a^2} = 2 \cdot b(a)$ ・・・⑦ だから、$\frac{\phi(a)}{\pi a^2} = C b(a)$ の定数は $C = 2$ である。

また、⑤より $b(a) = \frac{m v_0}{e a}$ が成立するので、$b(r)$ は減少関数になる。

［別解］ ⑦より $\phi(a) = 2\pi \int_0^a b(r)\, r\, dr = 2\pi a^2 \cdot b(a)$ だから、両辺を a で微分して整理すると、$b(a) a = 2a \cdot b(a) + a^2 \cdot b'(a)$ だから、$b(a) = -a \cdot b'(a)$ である。この微分方程式を解いてやると、$b(a) = \frac{C}{a}$ (Cは積分定数で正) の形の関数であるので、減少関数である。

［微分方程式について］

前述の２の(4) の解答における［別解］の微分方程式について説明してみたい。

微分方程式とは方程式に微分係数を含むものをいい、「ゆとり教育」以前では全ての高校生が習っていた学習範囲である。昔は、文系、理系を問わず、全員が数学Ⅲまで学習しており、その学習内容も現在の数学よりレベルは随分と高かったのだ。理系の場合、大学での専門教育で日常的に使われる数学の1分野である。

微分方程式とはどのようなものか？どのようにして作るのか？　具体的な事柄を示してみよう。

［例］　ある生物がいる。この生物1匹当たりに１秒間で 0.1% が死亡する。現在 100 万匹いる。この生物が 100 匹まで減少するのはいつだろうか？　なお、この生物は子孫を増やすことはないとする。 t 秒のときの生物の数を N とすると、生物の数の変化 ΔN は、Δt 秒後に死亡する数だけ現象するから、 $\Delta N=-N\times 0.001\times\Delta t$ である。よって、 $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=-0.001N$ が成立する。

Δt が微小なとき、 $\dfrac{dN}{dt}=-0.001N$ ･･･① の微分方程式（微分係数 $\dfrac{dN}{dt}$ を含む方程式）が得られる。文章の内容どおりに式を作れば、微分方程式が出来上がる（微分方程式の作り方）。

この微分方程式①を解くことが出来れば 100 匹まで減少するのはいつか分かる。

［微分方程式の解法］　基本的な解法として **「変数分離法」** というものがある。右辺、左辺に変数を分離する方法である。微分方程式①の変数は N と t である。①はＮが両辺ともにあるから、左辺に N を、右辺に t を分離してみよう。 $\dfrac{dN}{N}=-0.001\cdot dt$ ･･･② となる。これの両辺を積分すると、 $\int\dfrac{dN}{N}=\int -0.001\cdot dt$ である。積分計算を進めると、左辺が $\int\dfrac{dN}{N}=\log|N|+C_1$ 右辺が $\int -0.001\cdot dt=-0.001\cdot t+C_2$ だから、 $\log|N|+C_1=-0.001\cdot t+C_2$ となり、 $\log|N|=-0.001\cdot t+C_2-C_1=-0.001\cdot t+C$ とかける。よって、 $N=\pm e^{C}\cdot e^{-0.001\cdot t}$ が得られる。時刻 $t=0$ のとき $N=1000000$ だから、 $N=1000000\cdot e^{-0.001\cdot t}$ である。

100 匹未満になるのは $N=1000000\cdot e^{-0.001\cdot t}<100$ を解けばよい（指数方程式！）。両辺常用対数をとって、 $6-0.001\cdot t\cdot\log_{10}e<2$ より $\dfrac{4000}{\log_{10}2.71828}<t$ である。対数表を調べて、計算すると $t>\dfrac{4000}{0.4346}=9204$ より、100 匹未満になるのは、約 9200 秒後（約 2.6 時間後）である。

［前問の微分方程式の場合］　$b(a)=-a\cdot b'(a)$ より $\dfrac{db}{da}=-\dfrac{b}{a}$ とかける。変数分離形にすると、 $\dfrac{db}{b}=-\dfrac{da}{a}$ であり、両辺を積分して整理すると、 $\log|b|=-\log|a|+C$ (C は積分定数) だ。

よって、 $b(a)=\pm\dfrac{e^{C}}{a}$ より、条件（ $b(a)=\dfrac{mv_0}{ea}$ ）を代入して積分定数を決めると、 $b(r)=\dfrac{mv_0}{er}$ である。よって、 $b(r)=\dfrac{mv_0}{e}\cdot\dfrac{1}{r}$ となり、変数が r であるので減少関数である。

※ 微分法手式についての詳しい解説は Web ページ「物理の小道」(http://tachiro.hp,infoseek.co.jp/) の番外編をご覧下さい。