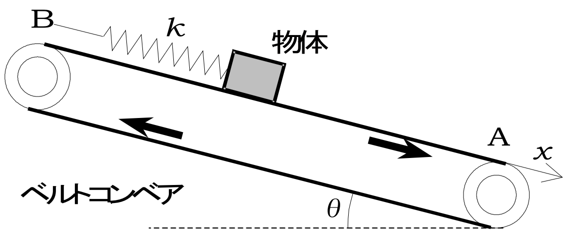
入試問題研究　第93回　1994年　東京大学　① 単振動

右の図のように、水平面から角度 θ だけ傾いたベルトと質量 m の物体がある。 このベルトは十分速い速度 V_0 で動く。また、ばね定数 k、ベルトと物体の間の動摩擦係数は μ_K 、静止摩擦係数は μ_S 、重力加速度は g であるとして下の問いに答えなさい。



最初、ベルトコンベアの動きをAからBに動かし、物体をばねの自然長の位置に置くと、物体はベルトコンベアの上で静止したままだった。

(1) このときのベルトと物体の間の動摩擦係数はいくらになるか。

次に、ベルトコンベアを動きを反転させて、BからAの向きに動かした。ばねの伸びが l_A の位置に物体を静かに置いたとき、物体はベルトの上で静止した。

(2) このときのばねの伸び l_A を求めなさい。

ばねが最初より長く伸びた位置（$l > l_A$）に静かに置いたところ、物体は静止せず単振動を続けた。

(3) この単振動の周期を求めなさい。

(4) この物体の最大速度を求めなさい。

ベルトと同じ速さになるように物体をベルトに乗せた。ベルトに乗りながら物体は動き、ばねの伸びが l_B になったところで、物体はベルトの上をすべり出した。

(5) 滑り始めるときのばねの伸び l_B を求めなさい。

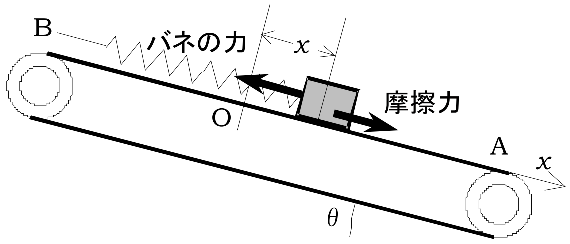
(6) このときの単振動の振幅を求めなさい。

(7) このときの物体の最大速度を求めなさい。

入試問題研究　第93回　1994年　東京大学　① 単振動

(1)　滑り落ちる方向（右下）を正として、ばねの力と物体のベルトとの動摩擦力と重力の分力が釣り合うから $mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = 0$ より、 動摩擦係数は $\mu_k = \tan\theta$ である。

(2)　ベルトは下向きに動くので、下向きの動摩擦力、斜面を下る方向の重力の分力、上向きのばねの力が釣り合う。x 軸方向成分より、$\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta - kl_A = 0$ が成立する。 (1)の $\mu_k = \tan\theta$ を代入して、これを解くと、



$l_A = \dfrac{mg(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)}{k} = \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$ になる。よって、ばねが $l_A = \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$ 伸びたところで釣り合うことになる（この位置がこの単振動の中心になる！）。

(3)　さらに離れたところに置くと静止せず単振動をする。 釣り合いの位置（単振動の中心点）から x ずれたところでの運動方程式を作ると、$ma = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta - k(l_A + x)$ になる。これより $ma = -kx$ だから、$a = -\dfrac{k}{m}x$ になる。単振動の公式と比較してみると、$a = -\dfrac{k}{m}x = -\omega^2 x$ だから、この物体の運動は、角振動数が $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 、周期が $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ の単振動である。

(4) 単振動の公式 $v = A\omega\cos(\omega t + \delta)$ 、$x = A\sin(\omega t + \delta)$ より、三角関数部分を消去すると、$\left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2$ である。単振動の中心（$x=0$）で最大速度となり、 $v = \pm A\omega$ より、最大速度は $v = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。

（単振動の中心 $x=0$ より $\sin(\omega t + \delta) = 0$ 、$\cos(\omega t + \delta) = \pm 1$ ）

(5) ベルトと同じ速さで乗せると、乗せたとき、物体はベルトの上で滑らず静止する。そのときの摩擦力は静止摩擦力である。 ばねが伸びるにつれ、静止摩擦力を大きくなるが、滑らない限界としてその大きさは最大摩擦力まで可能である。そのときのばねの伸びを x、摩擦力を f とすると、釣り合いの関係より、$kx - f - mg\sin\theta = 0$ が成立するので、静止摩擦力 $f = kx - mg\sin\theta$ となる。静止摩擦力が最大摩擦力より小さいうちは滑らないので、 $kx - mg\sin\theta \le \mu_S mg\cos\theta$ より、$x < \dfrac{mg(\mu_S\cos\theta + \sin\theta)}{k}$ ではベルトの上で滑ずベルトと同じ速さで動く。滑りだすのは $l_B = \dfrac{mg(\mu_S\cos\theta + \sin\theta)}{k}$ のときになる。

(6) O点を中心とする単振動である。一般に単振動の変位、速度は $x = A\sin(\omega t + \delta)$、$V_0 = A\omega\cos(\varpi t + \delta)$ と表される（初期位相δ）から、三角関数部分を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて消去すると、変位と速度と振幅の間の関係式は $x^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2 = A^2$ である。

釣り合いの位置からのずれは、$l = l_B - l_A = \dfrac{mg(\mu_S\cos\theta - \sin\theta)}{k}$ であり、振幅を求めるには、l のところで速度が V_0（滑り始めたとき速度ゼロではない！）より 、 この関係式に代入して、この単振動の振幅を求めると、$A_2 = \sqrt{(l_B - l_A)^2 + \dfrac{mV_0^2}{k}}$ である。

(7) 最大速度は単振動の中心O点だから、$v = \pm A\omega$ …(3) より、最大速度は $V_2 = A_2\omega = \sqrt{\dfrac{k(l_B - l_A)^2}{m} + V_0^2}$ である。