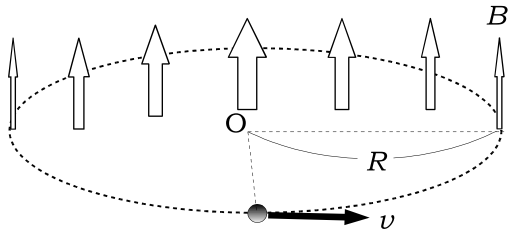
入試問題研究　第94回　2004年　千葉大学　⑤　電磁誘導

電子加速器ベータトロンについえ考えてみよう。以下の問いに計算過程も含めて答えなさい。

まず、図のように電荷 $-e$ ($e>0$)、質量 m の電子が、一様な磁束密度 B の磁場（磁界）の中を、速さ v で、原点Oを中心とする半径 R の等速円運動をしている場合を考える。ただし、磁場は円を含む平面に垂直であるものとする。



問1 電子の運動量 p の大きさを e 、 R 、 B を用いて表しなさい。

たとえ電子が描く円の内部で磁束密度が一様でなくても、磁場が時間的に変化しない場合には、円周上で磁束密度が B である限り、電子は同じ等速円運動する。

さて、時間 Δt の間に円内部の磁束密度の平均値 $\overline{B}$ が $\Delta\overline{B}$ 増加した場合を考えてみよう。ただし、円内部の磁場の強さは時間と円の中心からの距離だけに依存するものとする。このとき電子には、半径 R の円周上の接線方向に力が働く。

問2 (1) 電子が円周上の接線方向に力を受ける原因を20字程度で記述しなさい。

(2) その力の大きさを求めなさい。

問3 時間 Δt の間に増加した運動量 Δp の大きさを求めなさい。

円内部の磁場の増加に加え、電子の軌道上の磁束密度も適当な大きさ ΔB だけ増加させることにより、同じ半径の円運動を維持させることができる。

問4 半径 R の円運動を維持するために必要な円周上の磁束密度の増加 ΔB と、円内部の平均磁束密度の増加 $\Delta\overline{B}$ の間の関係式を求めなさい。

問5 円の半径 $R=40\,\mathrm{cm}$ のベータトロンにおいて、 $\Delta t=1.0\times10^{-3}$ 秒の間に平均磁束密度が $\Delta\overline{B}=1.0\times10^{-3}$ T だけ増加したときの電子の速さの増加を求めなさい。ただし、電子については $e=1.6\times10^{-19}$ C、 $m=9.1\times10^{-31}$ kg である。

入試問題研究　第94回　2004年　千葉大学　⑤　電磁誘導　　解答・解説

必要な基本事項(電気分野)

電界から受ける電荷の力　$f=qE$　、電界の公式　$E=\dfrac{V}{d}$

円運動の向心力の公式　$f=\dfrac{mv^2}{r}=mr\omega^2$　、ローレンツ力の公式　$f=qvB\sin\theta$

電磁誘導の公式　$V=-N\cdot\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

問1 電子が磁界から受ける力(ローレンツ力)の大きさは、　$f=evB$　であり、このローレンツ力を円運動の向心力として円運動する。このときの電子の速度を　v　とすると、向心力は

$f=\dfrac{mv^2}{R}$　だから、関係式　$evB=\dfrac{mv^2}{R}$　が成立する。

問2

(1) 「磁束の変化により円周方向に誘導起電力が生じるため」

(2) 電磁誘導の法則の公式　$V=-N\cdot\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$　より、誘導起電力の大きさは　$V=\dfrac{\pi R^2\cdot\Delta\overline{B}}{\Delta t}$　。

電界の公式　$E=\dfrac{V}{d}$　より、誘導電界の大きさは　$E=\dfrac{V}{2\pi R}=\dfrac{\pi R^2\cdot\Delta\overline{B}}{2\pi R\Delta t}=\dfrac{R\cdot\Delta\overline{B}}{2\Delta t}$　である。

よって、電子が誘導電界から受ける力は　$f=eE=\dfrac{e\cdot R\cdot\Delta\overline{B}}{2\cdot\Delta t}$　である。

問3 「運動量の変化は力積に等しい」から、運動量の変化は　$\Delta p=f\cdot\Delta t=\dfrac{e\cdot R\cdot\Delta\overline{B}}{2}$　・・・②　。

問4 ①より　$p=eBR$　が成立する。電子が加速後も半径　R　の円運動を維持するために必要な円周上の磁束密度の増加が　ΔB　とすると、①より　$p+\Delta p=e(B+\Delta B)R$　も満たす。

よって、　$\Delta p=e\cdot\Delta B\cdot R$　だから、　$\dfrac{e\cdot R\cdot\Delta\overline{B}}{2}=e\cdot\Delta B\cdot R$　が成立する。

よって、半径　R　の位置での磁束密度の増加は　$\Delta B=\dfrac{\Delta\overline{B}}{2}$　・・・③を満たす必要がある。

問5 電子の速度変化を　Δv　とすると、　$\Delta p=m\cdot\Delta v$　が成立する。

よって、②より、電子の速度の変化は　$\Delta v=\dfrac{\Delta p}{m}=\dfrac{e\cdot R\cdot\Delta\overline{B}}{2m}$　・・・④ となることが分かる。

つぎに、円軌道の半径　$R=40\,\mathrm{cm}=0.40\,\mathrm{m}$　、平均磁束密度変化　$\Delta\overline{B}=1.0\times10^{-3}$　T、

電気素量　$e=1.6\times10^{-19}$　C、電子の質量　$m=9.1\times10^{-31}$　kg　の数値を④に代入して、

電子の速度変化を求めると、　$\Delta v=\dfrac{(1.6\times10^{-19})\times(0.40)\times(1.0\times10^{-3})}{2\times(9.1\times10^{-31})}$　になる。

これを計算すると、このベータトロンによる電子の速度の変化は　$\Delta v=3.5\times10^{7}$　m/s である。