入試問題研究　第 95 回　2001 年　　姫路工大　　①　　単振動（改作）

図 1 のような、円筒状（円の中心 O、半径 R）の斜面（以下簡単に斜面という）がある。質量 m の質点 A と質量 M のおもり B を軽い糸につなぎ、斜面の頂上に取り付けられたなめらなに動く小さな滑車を通して、質点 A を図のように斜面上に置く。重力加速度を g として以下の問いに答えなさい。ただし、質点、おもり、滑車は図の斜面内にあり、質点はつねに斜面から離れないものとする。

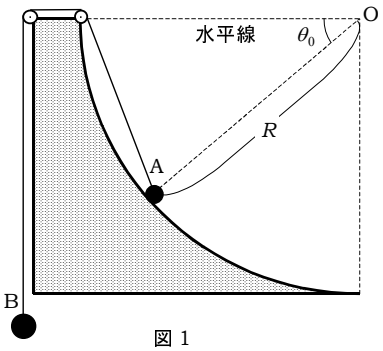

図 1

問1　斜面はなめらかであるとして、糸の張力を T、質点が斜面から受ける抗力を N、点 O と質点 A を結ぶ線が水平線となす角を θ_0 とおいて、質点 A とおもり B についてつりあいの式を求めなさい。ただし、質点 A については、斜面の接線方向と法線方向の成分に分けて考えなさい。

問2　前問において、質点 A が斜面の途中でつりあうための質点とおもりの質量の条件を求めなさい。

問3　図 1 の質点 A のつりあいの位置からなめらかな斜面に沿って、微小な角度 δ だけ静かに移動させたとき、質点 A のつりあいを保つために追加すべき力の斜面接線方向の成分を、m、M、g、θ_0、δ を用いて表しなさい。ただし、δ が θ_0 に比べて十分に小さいとき、次の近似式がなりたつ。

$$\cos(\theta_0 + \delta) = \cos\theta_0 \cos\delta - \sin\theta_0 \sin\delta \cong \cos\theta_0 - \delta \sin\theta_0$$

問4　追加の力を取り除くと、質点 A は単振動する。このことを説明しなさい。

おもりの質量を調節し、$m = \sqrt{3}M$ になるようなおもりに取り換え同じ運動をさせた。

問5　このとき、質点 A のつりあいの位置（水平線からの角度）を求めなさい。

問6　このときの質点 A の単振動の周期を m、M、g を使って表しなさい。

入試問題研究　第95回　2001年　　姫路工大　　①　　単振動　　**解答・解説**

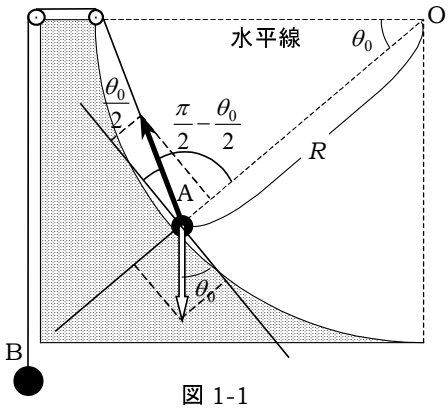

図 1-1

問1　おもりBのつりあいについて、糸の張力 T と重力 Mg がつりあうから、$T=Mg$ …① が成立する。また、質点 A のつりあいについて、斜面に平行な方向の力のつりあいより、$mg\cos\theta_0 = T\cos\frac{\theta_0}{2}$ …② が成立する。
また、半径方向の力のつりあいより、斜面からの垂直抗力を N とすると、$N+T\sin\frac{\theta_0}{2}=mg\sin\theta_0$ …③ が成立する。

問2　つりあうとき、$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ に解が存在する。①、②より、$m\left(2\cos^2\frac{\theta_0}{2}-1\right)=M\cos\frac{\theta_0}{2}$ …④ だから、$X=\cos\frac{\theta_0}{2}$ とおいて、$f(X)=2mX-MX-m=0$ になる。よって、$f(X)=0$ が $0<X<1$ の解を持てばよい。2次の係数が $2m>0$ であるから、判別式 $M^2+8m^2>0$ かつ $f(0)=-m<0$ かつ $f(1)=2m-M-m>0$ であればよい。よって、$m>M$ であれば斜面の途中で静止できる。また、この2次方程式の解は $\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{M\pm\sqrt{M^2+8m^2}}{4m}$ であるが、$\cos\frac{\theta_0}{2}>0$ の条件から、静止する位置は $\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{M+\sqrt{M^2+8m^2}}{4m}$ のほうが正解だ。（当然、$\frac{M-\sqrt{M^2+8m^2}}{4m}<0$ は不適解）

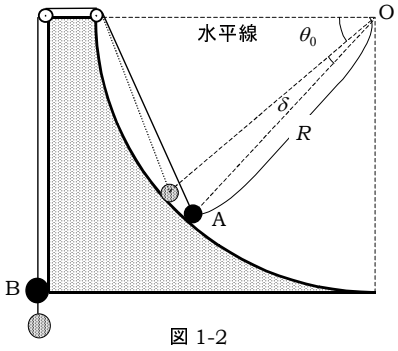

図 1-2

問3　角度が $\theta_0+\delta$ のとき、斜面に平行な力は、斜面下向きを正として、$mg\cos(\theta_0+\delta)$、$-Mg\cos\frac{(\theta_0+\delta)}{2}$ になる。近似式を使って、重力の分力が $mg\cos(\theta_0+\delta)=mg(\cos\theta_0-\delta\sin\theta_0)$、張力の分力が $-Mg\cos\frac{(\theta_0+\delta)}{2}=-Mg\left(\cos\frac{\theta_0}{2}-\frac{\delta}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$ より、A に働く力がつりあうために追加する力を F とすると、$F+mg(\cos\theta_0-\delta\sin\theta_0)-Mg\left(\cos\frac{\theta_0}{2}-\frac{\delta}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)=0$ …⑤ になる。①、②を⑤に代入して整理すると、$F=\left(m\sin\theta_0-\frac{M}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)g\cdot\delta$ である。（注：$m>M$、$\sin\theta_0>\sin\frac{\theta_0}{2}>0$ だから、$F>0$ である。）

問4　追加した力を取り去ると、質点は 斜面下方の向きに復元力を受ける。つりあいの位置からのずれの距離は $x=R\delta$ だから、復元力を式で示すと、$-\left(m\sin\theta_0-\frac{M}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\frac{g}{R}\cdot x$ と書ける。質点 A には変位 x に比例した復元力が働いている。よって、質点 A は単振動になる（単振動の公式 $f=-m\omega^2x$）。

問5　質点の質量とおもりの質量は $m=\sqrt{3}M$ の関係になるので、問２の $\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{M\pm\sqrt{M^2+8m^2}}{4m}$ に代入して、$\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{M\pm\sqrt{M^2+8\left(\sqrt{3}M\right)^2}}{4\left(\sqrt{3}M\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ になるから、$\theta_0=60°$ である。よって、質点 A のつりあいの位置は 水平線からの角度が $\theta_0=60°$ になる位置である。

問6　問 4 より、つりあいの位置から微小な角度 δ ずれた（ずれた距離 $x=\delta R$）とき、質点 A に働く復元力は $-\left(m\sin\theta_0-\frac{M}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\frac{g}{R}\cdot x$ だから、$\theta_0=60°$ を代入して、$-\frac{\left(2\sqrt{3}m-M\right)g}{4R}\cdot x$ になる。$f=-m\omega^2x$ より、$\omega^2=\frac{\left(2\sqrt{3}m-M\right)g}{4mR}$ である。よって、周期は 公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ に代入して整理すると、$T=2\pi\sqrt{\frac{4mR}{\left(2\sqrt{3}m-M\right)g}}$ である。