

入試問題研究 第97回 1999年 広島大学 力学基本

図1のような十分大きなプールでの、長さ l 、質量 m 、断面積 S の円柱状の浮きの運動を考えよう。浮きの水中部分の長さを x と置く。浮きと空気ならびに水との摩擦は無視できるものとし、浮きは水中と空气中を滑らかに、横揺れすることなく鉛直方向のみに運動するものとする。水の密度を ρ 、重力加速度を g として次の各問いに答えなさい。

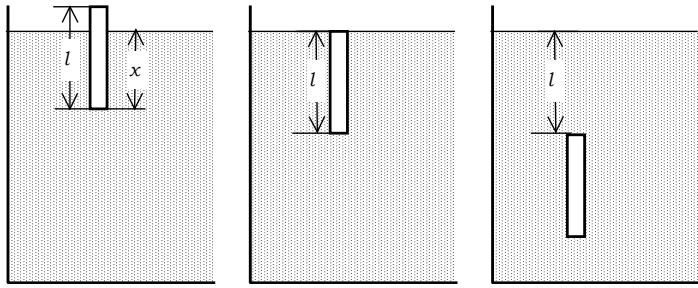


図1

図2

図3

- (1) 浮きが静止しているときの x の値を x_0 として、浮きに働く力のつりあいの式を書け。

- (2) 浮きは全体が沈まないためには、浮きの質量 m はある値 m_1 より小さくなくてならない。 m_1 を求めよ。

- (3) 浮きを静止状態から下方にわずかに引っ張り静かに離したところ、浮きは浮いた状態 ($0 < x < l$) で周期運動を始めた。その周期を求めよ。

次に、図2のように浮きをその上面が水面と等しくなるように下方に引っ張り静かに離した。なお、浮きの質量は $m < m_1$ であるとする。

- (4) 浮き全体が水中から飛び出さないためには、浮きの質量 m はある値 m_2 より大きくてはならない。この m_2 を求めなさい。また、その答えに至る過程も記入しなさい。

さらに、図3のように浮きをその上面が水面下 l になるように沈め、静かに離した。ここでも浮きの質量は $m < m_1$ であるとする。

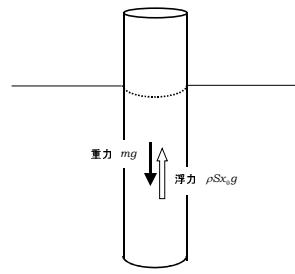
- (5) 浮き全体が水中にある間、浮きはどのような運動をするか。その名称を示しなさい。

- (6) 浮きの上面が水面に達したときの浮きの速さを求めなさい。

- (7) 浮き全体が水中から飛び出さないためには、浮きの質量 m はある値 m_2' より大きくてはならない。 m_2' を求めよ。また、その答えに至る過程も記入しなさい。

入試問題研究 第97回 1999年 広島大学 力学基本 解説

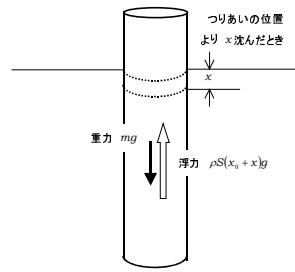
(1) $mg = \rho S x_0 g$ であるので、 $x_0 = \frac{m}{\rho S}$ である。



(2) 浮きが浮くためには $x_0 < l$ だから、 $x_0 = \frac{m}{\rho S}$ を代入して $\frac{m}{\rho S} < l$ だから、

$m < \rho S l = m_1$ だ。よって、浮くことが出来る最大質量は $m_1 = \rho S l$ である。

(3) 单振動の解法の手順通りに解けば良い。①つりあつた位置を原点として、②そこから更に x 沈んだ位置で物体に働く力を求めると、重力 mg と、浮力 $\rho S(x_0 + x)g$ だから、③運動方程式を作ると $mg - \rho S(x_0 + x)g = ma$ だ。これを整理すると $-\rho S g x = ma$ だから、物体の加速度は $a = -\frac{\rho S g}{m} x$ だ。④单振動の条件式 $a = -\omega^2 x$ と比較すると、



$\omega^2 = \frac{\rho S g}{m}$ だ。したがって、周期の公式に代入して $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S g}}$ である。

(4) 单振動の振幅は手を離した位置とつりあいの位置の距離だから、振幅は $A = l - x_0$ だ。最も上昇した位置が水面から飛び出さないためにはつりあいの位置のときに沈んでいる部分の長さより振幅が短ければ良いので、

$A = l - x_0 < x_0$ である。これより、 $x_0 > \frac{l}{2}$ だから、 $x_0 = \frac{m}{\rho S}$ を代入した $\frac{m}{\rho S} > \frac{l}{2}$ より、質量の条件を求める

と $m > \frac{\rho S l}{2} = m_2$ である。よって、飛び出さないための最低の質量 $m_2 = \frac{\rho S l}{2}$ である。

(5) 水の抵抗力を考えないとすると、完全に沈んでいるときは浮力 $\rho S l g$ と重力 mg である。したがって、運動方程式は $(\rho S l - m)g = ma$ であるので、物体は加速度 $a = \frac{(\rho S l - m)g}{m}$ の等加速度運動になる。

(6) 等加速度運動の公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ に代入して $v^2 = 2 \cdot \frac{(\rho S l - m)g}{m} \cdot l = \frac{2gl(\rho S l - m)}{m}$ であるので、水面に達したときの棒の速度は $v = \sqrt{\frac{2gl(\rho S l - m)}{m}}$ である。

別解 上にあった水が下に、下にあった物体が上に入れ替わるのだから重力による位置エネルギーは $\rho S l g l - m g l$ だから、力学的エネルギー保存の法則より、 $\rho S l g l - m g l = \frac{1}{2} m v^2$ $v = \sqrt{\frac{2gl(\rho S l - m)}{m}}$ である。

(7) 单振動の公式 $x = A \sin \omega t$ 、 $v = A \omega \cos \omega t$ であるので、单振動の振幅 A は $A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$ の関係を満たす。代入すると、 $A^2 = \left(l - \frac{mg}{\rho S g}\right)^2 + \frac{2gl(\rho S l - m)}{m} \frac{m}{\rho S g}$ だ。浮きが水面より上に飛び出さないためには、振幅が「浮きがつりあっているときに沈んでいる長さ $x_0 = \frac{m}{\rho S}$ 」より小さければ良い。これより、

$\left(l - \frac{mg}{\rho S g}\right)^2 + \frac{2gl(\rho S l - m)}{m} \frac{m}{\rho S g} < \left(\frac{m}{\rho S}\right)^2$ である。これを整理すると、 $3l^2 - \frac{4mgl}{\rho S g} < 0$ になるので、

$m > \frac{3\rho S l}{4}$ だ。したがって、浮きが水面から飛び出さないための浮きの最低の質量は $\frac{3\rho S l}{4}$ である。