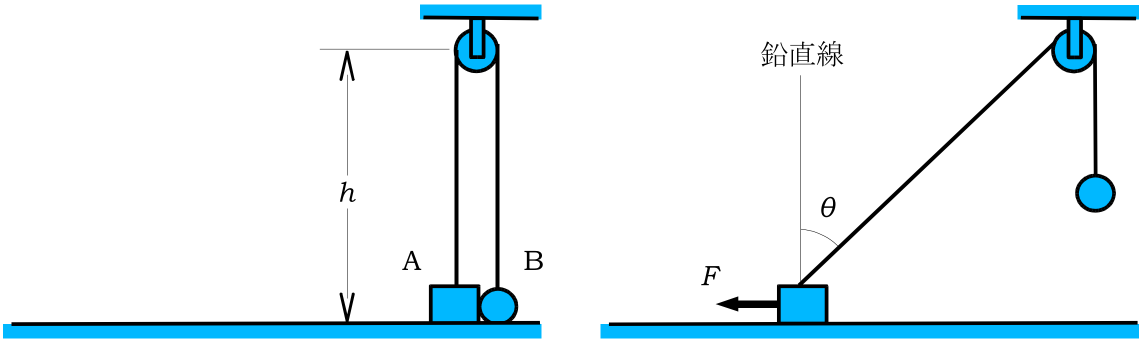
新作問題シリーズ　第１回　仕事とエネルギー

※ 2005 年度のセンター試験第2問を参考に問題を作って見ました。



上図の左のように、小物体 A、B が軽い糸でつながれ、小さく軽い滑車（床から h の高さ）を通して天井から吊るされている。糸の長さを調節して、滑らかな床の上に糸に緩みが無いように置かれている。小物体 A の質量は M 、小物体 B の質量が m （ただし、 $M>m$ ）である。重力加速度を g とし、物体、滑車の大きさ、摩擦などは考えなくてよい。

小物体 A に左向きの力を加えてゆっくりと床の上を滑らせて行く。糸が鉛直線となす角が θ になったとき、小物体 A を引く力が $\boxed{\quad①\quad}$ である。このときの小物体 B は床からの高さが $\boxed{\quad②\quad}$ まで上昇している。さらに小物体 P を左に引いて、糸が鉛直線となす角が $\theta=45°$ になる位置まで移動させた。滑車の真下からその位置に移動させる間に、小物体を引く力がした仕事は $\boxed{\quad③\quad}$ である。

続いて、小物体 A から静かに手を離したところ、小物体 A は右に移動し始め、小物体 B は下がり始めた。糸が鉛直線となす角が θ になる位置を通過するときの小物体 A、B のそれぞれの速度を v_A 、 v_B とすると、糸が緩まない条件から $\boxed{\quad④\quad}$ ･･･(1) の関係式が成立する。また、エネルギー保存の法則から $\boxed{\quad⑤\quad}$ ･･･(2) の関係式も成立する。

やがて、小物体 A は滑車の真下まで到達し、小物体 B に衝突する。衝突直前の小物体 A、B の速度は、A が $\boxed{\quad⑥\quad}$ 、B が $\boxed{\quad⑦\quad}$ である。

問1　上の文章の空欄に適当な数式、関係式を入れなさい。

新作問題シリーズ　第１回　仕事とエネルギー

※ 2005 年度のセンター試験第2問を参考に問題を作って見ました。

問1　小物体A、Bに働く力がそれぞれつりあう（鉛直方向、水平方向ともに）。よって、Aの水平方向の力のつりあいから　$T\sin\theta-F=0$　が成立する。また、Bの鉛直方向の力のつりあいから　$T-mg=0$　が成立する。よって、糸が鉛直線となす角が　θ　になったときに小物体Aを引く力は　$F=mg\sin\theta$　・・・① である。

糸の長さは全体で　$2h$　である。このとき、滑車からAの糸は長さが　$\dfrac{h}{\cos\theta}$　になるので、小物体Bの床からの高さは部分だから、　$\dfrac{h}{\cos\theta}-h$　・・・② である。

糸が鉛直線となす角が　$\theta=45°$　になるまで移動させると、小物体Bは高さ　$\left(\sqrt{2}-1\right)h$　まであがる。摩擦が無いので、小物体Aを引く力がした仕事は小物体Bの重力による位置エネルギーになっている。よって、　$\left(\sqrt{2}-1\right)mgh$　・・・③ である（ゆっくり引くので運動エネルギーはない）。

続いて、糸が緩まない条件より、小物体Aの速度の糸の方向成分　$v_A\sin\theta$　が小物体Bの速度　v_B　と等しくならなければならない。よって、　$v_A\sin\theta=v_B$　・・・④ が成立する。

［別解］　滑車の真下からの距離を、小物体Aが x、小物体Bが y とする。

糸の長さが　$2h$　であるので　$\sqrt{h^2+x^2}+(h-y)=2h$　が成立する。

両辺を時間　t　で微分して、それぞれの速度を求めればよい。

時間で　t　で微分して　$\dfrac{d}{dt}\sqrt{h^2+x^2}+\dfrac{d}{dt}\cdot(h-y)=\dfrac{d}{dt}\cdot 2h$　より　$\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\cdot\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=0$　が成立する。

小物体A、Bの速度はそれぞれ　$v_A=-\dfrac{dx}{dt}$　、　$v_B=-\dfrac{dy}{dt}$　、図より　$\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\sin\theta$　であるから　$v_A\sin\theta=v_B$　・・・④ が成立する。（どちらでといても当然同じ答えだ！）

力学的エネルギー保存則から　$\left(\sqrt{2}-1\right)mgh+0=\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)mgh+\dfrac{1}{2}Mv_A^2+\dfrac{1}{2}mv_B^2$　・・・⑤ も成立する。

小物体Aは滑車の真下まで到達したときだから、　$\theta=0$　を④、⑤に代入して解くと、衝突直前のA、Bの速度は、Aが　$v_A=\sqrt{\dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)mgh}{M}}$　・・・⑥、Bが　$v_B=0$　・・・⑦ である。