新作問題シリーズ　第2回　単振動

遠く離れた地点Oに音源装置Sがある。音源装置Sから離れた地点Aでこの音源装置Sから出る音の振動数を観測したところ、時刻 $t=t_1$ [s] で振動数が f_1 [Hz] で極大になり、時刻 $t=t_2$ [s] で振動数が f_2 [Hz] で極小になっていた。それ以降も、振動数の変化は一定の周期で繰り返されていた。 どうも音源装置Sは一定の周期で単振動しているようだ。

そこで、音源装置Sが出す音の振動数を f_0 [Hz] 、音源装置Sは地点Oを中心として振幅 A [m]、周期 T [s] でOAの方向に単振動しているとしよう。なお、そのとき無風で、音速は V [m/s] であるとする。観測された f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 からどこまで分かるのか考えてみよう。

音の振動数が変化するのは、音源が運動するドップラー効果である。音源がOA方向に単振動しているとき、その単振動時の最大速度を v_0 とする。単振動では速度最大は中心（地点O）を通過するときである。よって、観測された音の極大値 f_1 、 f_2 は地点Oを音源Sが通過したときに発せられた音になる。ドップラー効果の公式に代入して、それぞれのときの振動数の関係式を作ると、 $f_1=\boxed{①}$ 、 $f_2=\boxed{②}$ の2式が成立する。この2つの関係式は重要な手がかりになりそうである。

問1　上の文章の空欄に数式を入れなさい。ただし、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V 、 v_0 のうちから必要なものを使って表しなさい。

問2　音源の音の振動数 f_0 はいくらであったか、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V のうち必要なものを使って表しなさい。

問3　音源装置の単振動の最大速度 v_0 はいくらであるか、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V のうち必要なものを使って表しなさい。

問4　音源装置の単振動の周期 はいくらであるか、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V のうち必要なものを使って表しなさい。

問5　音源装置の単振動の振動数はいくらであるか、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V のうち必要なものを使って表しなさい。

問6　音源装置の単振動の振幅はいくらであるか、 f_1 、 f_2 、 t_1 、 t_2 、 V のうち必要なものを使って表しなさい。

新作問題シリーズ　第２回　単振動　解答・解説

問１　音源の最大速度 v_0 で近づく場合と遠ざかる場合のドップラー効果である。

近づく場合が最大振動数のとき $f_1=f_0\cdot\dfrac{V}{V-v_0}$ ・・・(1)

遠ざかる場合が最小振動数のとき $f_2=f_0\cdot\dfrac{V}{V+v_0}$ ・・・(2)

以上の２つの関係式が成立する。 ※ この２式が重要な関係式となってくる。

問２ (1)、(2) の両式の逆数を取り、辺々足し算して v_0 を消去すると、$\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}=\dfrac{2}{f_0}$ が得られる。これより $f_0=\dfrac{2f_1f_2}{f_1+f_2}$ ・・・(3) である。

よって、音源が出す音の振動数は $\dfrac{2f_1f_2}{f_1+f_2}$ ・・・(4) である。

問３ (1) に (3)を代入して f_0 を消去すると $f_1=\dfrac{2f_1f_2}{f_1+f_2}\cdot\dfrac{V}{V-v_0}$ である。これより、v_0 について解けばよい。よって $V-v_0=\dfrac{2f_2V}{f_1+f_2}$ より $v_0=V-\dfrac{2f_2V}{f_1+f_2}=\dfrac{(f_1-f_2)V}{f_1+f_2}$ となる。

よって、音源装置 S の最大速度は $v_0=\dfrac{(f_1-f_2)V}{f_1+f_2}$ である。

問４ 単振動の中心（地点 O）を観測者に近づく方向に通過（最大振動数時 $t=t_1$ ）から観測者から遠ざかる方向に通過（最小振動数時 $t=t_2$ ）は音源装置 S の単振動の周期 T の半分に相当する。

また、**音源装置から観測者まで伝わる時間はどちらも同じであるので、伝播時間は考慮せずにすむ (伝播時間が絡んでくる問題になると非常に難しくなる！)。** よって、音源装置 S の単振動の周期 T は $T=2(t_2-t_1)$ である。

問５ 周期の逆数が振動数だから、音源装置 S の単振動の振動数は $F=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2(t_2-t_1)}$ [Hz] である。また、角振動数は $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi F=\dfrac{\pi}{t_2-t_1}$ [rad/s] である（問 6 で使うので）。

問６ 単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、$v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ 、$x=-\omega^2x$ より、速度最大値は $\cos(\omega t+\delta)=\pm1$ のときである。最大速度は $v_0=A\omega$ であるから **([重要]振幅と角振動数、最大速度の間の関係は $v_0=A\omega$)**、単振動の振幅は $A=\dfrac{v_0}{\omega}$ と表すことが出来る。

問 1、問 5 の結果を代入して $A=\dfrac{(f_1-f_2)V}{f_1+f_2}\div\dfrac{\pi}{t_2-t_1}=\dfrac{(f_1-f_2)(t_2-t_1)V}{\pi(f_1+f_2)}$ より、

音源装置 S の単振動の振幅は $A=\dfrac{(f_1-f_2)(t_2-t_1)V}{\pi(f_1+f_2)}$ である。

※ 少ない観測値でありながら、音源装置の単振動の様子が全て分かるのですね。