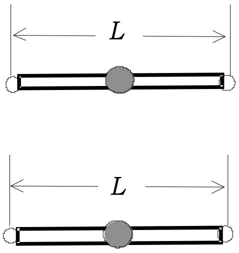
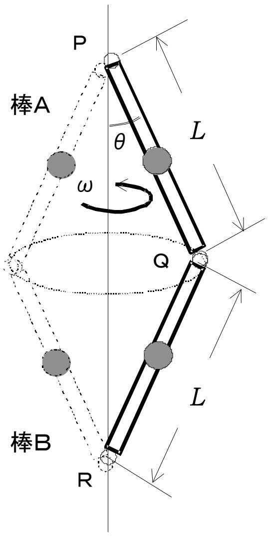
新作問題シリーズ 第４回　円運動応用

長さ L [m]の軽い棒の中央に質量 m [kg]の小物体がつけられたものが2本ある。この2本の棒を滑らかに曲がる軽くて小さなちょうつがいで連結した。連結棒の上端Pを鉛直に置かれた回転軸に上下方向には動かないが、滑らかに曲がることができるよう固定し、下端Rは回転軸に滑らかにすべることができるように接続した。連結棒が回転していないとき、連結棒は回転軸に沿って垂れ下がっているが、角速度 ω [rad/s]で回転させたとき、連結棒は回転軸から角度 θ [rad] 曲がった状態となったとする。重力加速度を g [m/s^2] として、下の各問いに答えなさい。





棒Ａ、Ｂにつけられた小物体の回転半径は ① [m] になる。したがって、棒A、Ｂの中央に付けられた小物体に働く遠心力は、f = ② [N] になる（以下、指定がないとき、この f を使ってよい）。

棒Aの上端Pに働く力は、N_y [N] が上向きに、N_x [N] が左向きに、下端Qには、水平左向きに F_x [N]、鉛直下向きに F_y [N] が働くものとする。一方、棒Bの下端Rには回転軸から垂直抗力 N [N] が左向きに働いているとする。

ここで棒Aに働く力のつりあいを考えてみる。水平方向のつりあいより、 ③ の関係式が成立する。また、鉛直方向のつりあいより ④ が成立し、また、連結部を中心とする棒Aのモーメントのつりあいより ⑤ が成立する。

つぎに、棒Bについて同様に考えてみよう。水平方向のつりあいより、 ⑥ の関係式が成立する。また、鉛直方向のつりあいより ⑦ が成立し、連結部を中心とするモーメントのつりあいより ⑧ が成立する。

(1) 上の文章の空欄に適当な数式をいれなさい。

①	②
③	④
⑤	⑥
⑦	⑧

(2) 棒Bについての関係式 ⑥ 、⑦ 、 ⑧ を使って、連結部に働く力 F_x、F_y を求めなさい。

(3) (2)の結果と、③ 、④ の関係式を使って、棒Aの上端に働く力 N_x、N_y を求めなさい。

(4) 回転の角速度 ω を重力加速度 g 、鉛直線と棒の間の角度 θ 、棒の長さ L を使って表しなさい。

新作問題シリーズ 第４回　円運動応用

棒Aには、回転軸に固定された上端Pには N_y [N]が上向きに、N_x [N]が左向きに、小物体には遠心力 f [N]に、下端Qには水平左向きに F_x [N]、鉛直下向きに F_y [N]が働くとする。一方、棒Bには、回転軸と下端Rは滑らかだから垂直抗力 N [N]が左向きに、小物体には遠心力 f [N]、重力 mg [N]が働いているとする。上下の棒の連結部Qに働く力は互いに作用反作用の関係が成立する。したがって、大きさが等しく向きが反対だから、棒Bの上端Qには、水平右向きに F_x [N]、鉛直上向きに F_y [N] が働く。

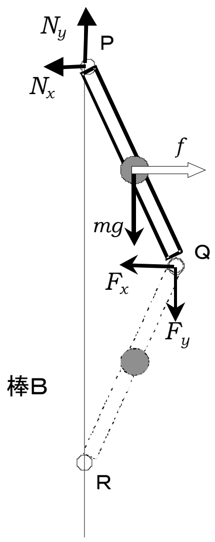


図1

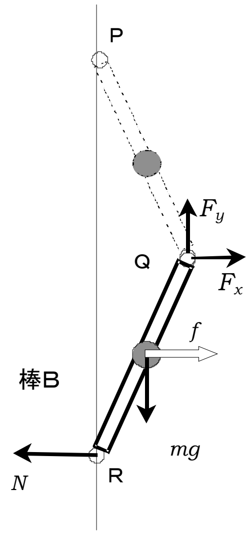


図２

(1)　棒A、Bにつけられた小物体の回転半径は、棒と回転軸との角度が θ だから、$r=\dfrac{L}{2}\sin\theta$ …① である。

小物体に働く遠心力は公式 $f=mr\omega^2$ より、

$$f=m\times\frac{L\sin\theta}{2}\times\omega^2=\frac{mL\omega^2\sin\theta}{2}\quad\cdots②$$ である。

棒Aに働く力のつりあいを考えてみよう。水平方向のつりあいより、$f-N_x-F_x=0$ …③、鉛直方向では $N_y-mg-F_y=0$ …④ になる。

次に、棒Aの下端Qを中心としたモーメントのつりあいから、左回りを正として、$mg\times\dfrac{L\sin\theta}{2}-f\times\dfrac{L\cos\theta}{2}+N_x\times L\cos\theta-N_y\times L\sin\theta=0$ …⑤ が成立。

一方、棒Bでは、力のつりあいより、水平方向では $f-N+F_x=0$ …⑥、鉛直方向では $F_y-mg=0$ …⑦ になる。 また、棒Bの上端Qを中心としたモーメントと力のつりあいから、遠心力、重力、下端に働く垂直抗力によるモーメントの和がゼロになるので、$f\times\dfrac{L\cos\theta}{2}+mg\times\dfrac{L\sin\theta}{2}-N\times L\cos\theta=0$ …⑧ である。

(2)　関係式⑦より $F_y=mg$ …⑨、関係式⑧より $N=\dfrac{f+mg\tan\theta}{2}$ だから、

関係式⑥に代入して　$F_x=N-f=\dfrac{mg\tan\theta-f}{2}$ …⑩が成立する。

よって、連結部Qに働く力は　$\left(F_x\ ,\ F_y\right)=\left(\dfrac{mg\tan\theta-f}{2}\ ,\ mg\right)=\left(\dfrac{2mg\tan\theta-mL\omega^2\sin\theta}{4}\ ,\ mg\right)$

(3)　⑨、⑩を③、④に代入して、$f-N_x-\dfrac{mg\tan\theta-f}{2}=0$ だから、$N_x=\dfrac{3f-mg\tan\theta}{2}$ …⑪が成立する。

また $N_y-mg-mg=0$ だから、$N_y=2mg$ …⑫になる。

よって、棒Aの上端Pに働く力は $\left(N_x,\ N_y\right)=\left(\dfrac{3f-mg\tan\theta}{2},\ 2mg\right)$ である。

(4)　以上の結果を⑤式 $mg\times\dfrac{L\sin\theta}{2}-f\times\dfrac{L\cos\theta}{2}+N_x\times L\cos\theta-N_y\times L\sin\theta=0$ に代入すると、

$$\frac{mgL\sin\theta}{2}-\frac{mL^2\omega^2\cos\theta}{4}+\frac{3mL^2\omega^2\sin\theta f\cos\theta-2mgL\sin\theta}{4}-2mgL\sin\theta=0$$ だから、

これを整理して、$-L\omega^2\cos\theta+3L\omega^2\sin\theta\cos\theta-8g\sin\theta=0$ になる。

したがって、$L\omega^2\left(3\sin\theta-1\right)=8g\tan\theta$　だから、棒の回転の角速度は $\omega=\sqrt{\dfrac{8g\tan\theta}{\left(3\sin\theta-1\right)L}}$　である。