

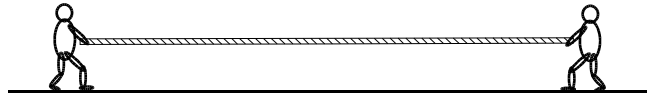
新作問題シリーズ 第5回 柱を立てる技術(モーメント)

昔から住居などの建造物を作るために柱を立てる技術は欠かせない。巨大建築の柱は当然長さも長く、重さも大きくなり、単純な発想では柱を立てることは困難になる。

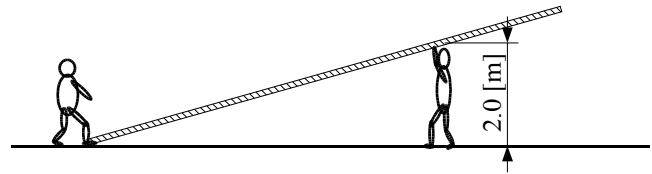
長さが 10 [m]、重さが 150 [kgw] の太さが均一な柱を立てる作業を2人ですることを考えてみる。一人が 発揮できる力の最大は 100 [kgw] とし、柱を持ち上げるときの支点の高さは 2.0[m]、重力加速度を $9.8[m/s^2]$ とする。

(1) 1人が柱の片端を持ち上げるとき、必要な力を求めなさい。

(2) 2人が柱の両端を持ち上げて運ぶ。柱を持ち上げるのに必要な力の大きさを求めなさい。



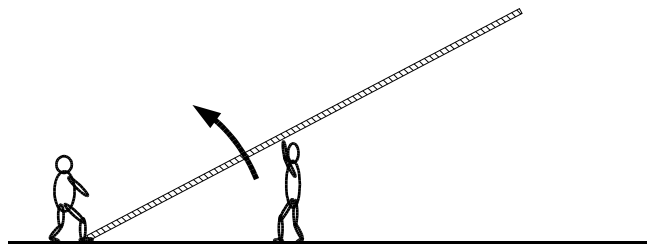
柱の片端を地面に置き1人がそれを固定する。もう1人が柱の反対側から持ち上げてゆくときの様子が右図である。このとき、柱を持ち上げる人が柱の4分の3の位置まで持ち上げたときについて考えてみよう。



(3) 柱の右側から柱に対して垂直に押し上げるために必要な力を求めなさい。

(4) 柱の左端を地面に固定するために必要な力を求めなさい。

(5) 右側の人徐徐に柱を持ち上げてゆき、この柱を立てたいが、この方法で柱を立てることは可能だろうか？ 検討してください。また、この方法で不可能ならば、柱を立てる別の方法を考え、柱が立つことを説明してください。



新作問題シリーズ 第5回 柱を立てる技術(モーメント) 解答・解説

(2) 1人が柱の片端を持ち上げるとき、必要な力を求めなさい。

モーメントのつりあいから $F \times 10 = 150 \times 5$ より、 $F = 75$ よって、75[kgw] である。

(3) 2人が柱の両端を持ち上げて運ぶ。柱を持ち上げるのに必要な力の大きさを求めなさい。

右端を中心とするモーメントのつりあいより

$F_1 \times 10 = 150 \times 5$ 、右端を中心とするモーメントのつり

あい $F_2 \times 10 = 150 \times 5$ より $F_1 = F_2 = 75$ だ。よって、それぞれが柱を持ち上げ運ぶときの力は 75[kgw] だ。

(4) 柱が地面に接している点を中心として考える。重力による時計回りモーメントが $150 \times 5 \sin \theta$ であり、持ち上

げる力による反時計回りモーメントが $F_1 \times 10 \times \frac{3}{4}$ より $150 \times 5 \cos \theta = F_1 \times 10 \times \frac{3}{4}$ …①、ま

た、 $\sin \theta = 2 \div (10 \times \frac{3}{4}) = 0.266\dots$ …② であるので、 $150 \times 5 \times \sqrt{1 - 0.267^2} = F_1 \times 10 \times \frac{3}{4}$ より

$F_1 = 96.38\dots$ になる。よって、柱を持ち上げる力は 96[kgw] 必要である。

(5) 力のつりあいを考える。柱を地面に固定する力 F_2 の向きは不明だから F_2 の力の水平方向成分の大きさを F_{2x} 、鉛直方向成分の大きさを F_{2y} とする。

力のつりあいから、水平方向は $F_{2x} = F_1 \sin \theta = 25.69\dots$ …③ が成立する。また、鉛直方向

は $F_{2y} = 150 - F_1 \cos \theta = 57.10\dots$ …④ が成立する。 $F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = 62.62\dots$ だから柱を地面に固定する力の大きさは 63[kgw] である。ここまでは何とかね！

(6) 右側の人徐徐に柱を持ち上げて柱を立てたいが、力の限界が 100[kgw] だから、これ以降の作業はうまく行きそうにない。計算すると 100[kgw] を超える力が必要であることが簡単に分かる。(例えば3分の2のところを持ち上げるときを考えよう)

左端の1人の働きが良くないようだから、左の端は石などで固定して2人で一緒に柱を持ち上げて立てる方法を検討してみよう。

1人あたりの力を F [kgw]とすると、左端を中心としたモーメントのつりあいから

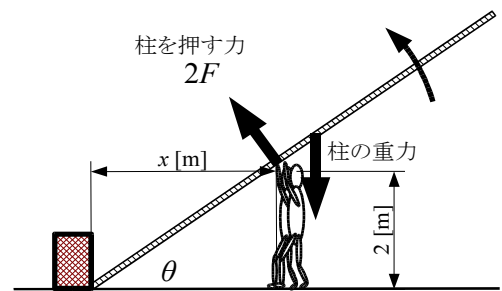
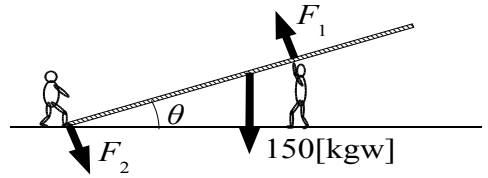
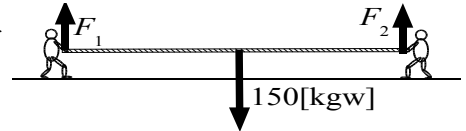
$150 \times 5 \times \cos \theta = 2F \times \frac{x}{\cos \theta}$ の関係が成立する。

また、 $\tan \theta = \frac{2}{x}$ 、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より θ を

消去すると $150 \times 5 = 2F \times x \times \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$ だから

一人あたりの力は $F = 375 \times \left(\frac{x}{x^2 + 4}\right)$ である。

よって柱を持つ位置 x が変化したときの F の最大値¹ は $x = 93.75$ になるから、1人が 94[kgw] (100[kgw]未満)の力を出せばよい。よって、2人だけでもこの柱を立てることが可能である。



1 相加平均 \geq 相乗平均を使って求めればよい。 $\frac{x}{x^2 + 4} = \frac{1}{x + \frac{4}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}} = \frac{1}{4}$ になる。なお、

等号成立は $x = \frac{4}{x}$ のとき、すなわち $x = 2$ のときである。