新作問題シリーズ 第７回　ちょうつがいで連結された棒のつりあい

長さ L [m]の軽い棒の中央に質量 m [kg]の小物体がつけられたものが3本ある。この3本の棒を滑らかに曲がる軽くて小さなちょうつがいで右の図のように連結した。端の棒を鉛直に持ちながら角速度 [rad/s]で回転させた。しばらくすると、棒B、Cは図2のように曲がった状態を保ちながら回転するようになった。棒と鉛直線との間の角度を測ると、棒Bは α 、棒Cは β であった。

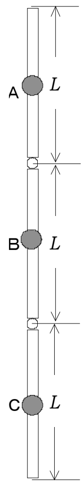

図1

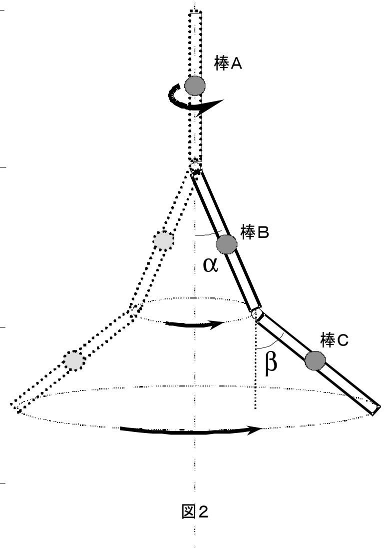

図2

(1) 棒Bの重心の回転半径はいくらになるか。

(2) 棒Bに働く遠心力はいくらになるか。

(3) 棒Cの重心の回転半径はいくらになるか。

(4) 棒Cに働く遠心力はいくらになるか。

(5) 棒Cの力のつりあいから、ちょうつがいを介して棒Bが棒Cに及ぼす力水平方向成分の大きさ f_x 、鉛直方向成分の大きさ f_y を求めなさい。

(6) 棒Cのモーメントのつりあいから、鉛直線と棒の間の角度 α 、β の条件式を求めなさい。

(7) 棒Bのモーメントのつりあいより、鉛直線と棒の間の角度 α 、β の条件式を求めなさい。

(8) このときの回転の角速度 ω を、棒B、Cと鉛直線の間の角 α 、β を使って表しなさい。

新作問題シリーズ 第７回　ちょうつがいで連結された棒のつりあい　　解答・解説

質量 m [kg]、長さ L [m]の一様な太さの棒が3本ある。この3本の棒を滑らかに曲がる軽くて小さなちょうつがいで右の図のように連結した。端の棒を鉛直に持ちながら角速度 [rad/s]で回転させた。しばらくすると、棒B、Cは図2のように曲がった状態を保ちながら回転するようになった。棒と鉛直遷都の間の角度を測ると、棒Bは α 、棒Cは β であった。

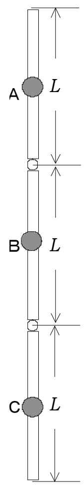

図1

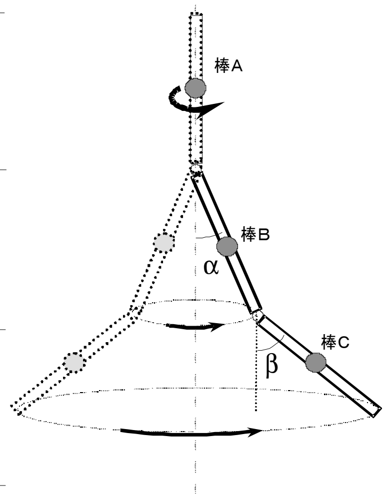

図2

(1) 重心は棒の中央だから、$r_B=\dfrac{L}{2}\sin\alpha$

(2) 遠心力の公式　$f=mr\omega^2$ より、$f_B=\dfrac{mL\omega^2\sin\alpha}{2}$ …①

(3) 重心は棒の中央だから、

$r_C=L\sin\alpha+\dfrac{L}{2}\sin\beta=\dfrac{L}{2}(2\sin\alpha+\sin\beta)$

(4) 遠心力の公式　$f=mr\omega^2$ より、棒Cに働く遠心力は

$f_C=\dfrac{mL\omega^2(2\sin\alpha+\sin\beta)}{2}$ …②　である。

(5) 棒Cに働く力のつりあいより、鉛直方向、水平方向のつりあいより、棒Bが棒Cに及ぼす力は、鉛直方向が上向きに $f_y=mg$ …③、水平方向が中心向きに $f_x=f_C=\dfrac{mL\omega^2(2\sin\alpha+\sin\beta)}{2}$ …④ である。

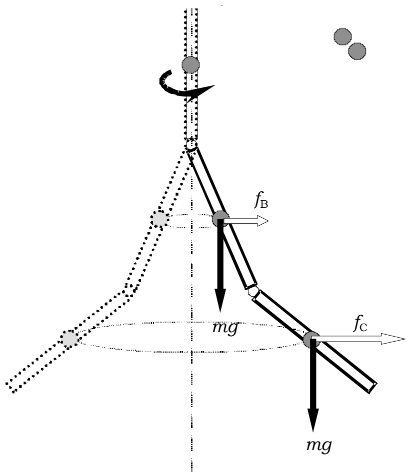

図3

(6) 棒Cについて考える。棒B、Cの接続部のちょうつがいを回転軸とするモーメントのつりあいより、$0=f_C\times\dfrac{L}{2}\cos\beta-mg\times\dfrac{L}{2}\sin\beta$ だから、

$L\omega^2(2\sin\alpha+\sin\beta)=2g\tan\beta$ …⑤　である。

(7) 棒Bについて考える。棒A、Bの接続部のちょうつがいを回転軸とするモーメントのつりあいより、

$0=f_B\times\dfrac{L}{2}\cos\alpha-mg\times\dfrac{L}{2}\sin\alpha+f_C\times L\cos\alpha-mg\times L\sin\alpha$　より、

$f_B\cos\alpha+2f_C\cos\alpha=3mg\sin\alpha$　…⑥ だ。

(8) ⑤より、$\omega=\sqrt{\dfrac{2g\tan\beta}{L(2\sin\alpha+\sin\beta)}}$ である。⑥に①、②を代入して、$L\omega^2(5\sin\alpha+2\sin\beta)=6g\tan\alpha$ …⑥' だから、$\omega=\sqrt{\dfrac{6g\tan\alpha}{L(5\sin\alpha+2\sin\beta)}}$ でもある。

参考　⑤、⑥'の２式より $L\omega^2$ を消去すると、

角度間の関係は $\tan\beta(5\sin\alpha+2\sin\beta)=3\tan\alpha(2\sin\alpha+\sin\beta)$ だ。