新作問題シリーズ 第8回 単振動

次の文章を読んで、下の各問に答えなさい。ただし、重力加速度を g とする。

［A］ 図１のように、質量 m の物体Aがばね定数 k のばねにつながれ、天井からぶら下げられている。物体Aはばねが $\boxed{①}$ 伸びたところでつりあう。

ばねが自然長になる位置まで手で物体Aを持ち上げ、静かに物体Aを手から離した。物体Aは上下に振動を続ける。この振動は、物体Aの最下点は $\boxed{②}$、速度の最大値は $\boxed{③}$、周期が $\boxed{④}$ の単振動である。

［B］ 図２のように、物体Aとばねに加えて、物体Aと同じ質量の物体Bを通し、物体Bだけを手で支えて、両物体を静止させた。そのとき、物体Bは物体Aの位置より h 上であった。

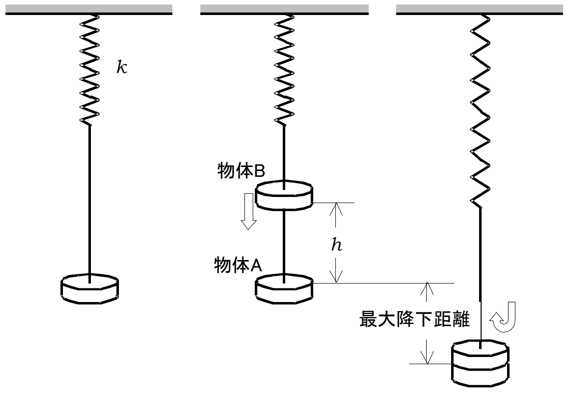

図1　図2　図3

つづいて、物体Bから手を静かに離したところ、物体Bはなめらかに落下し、物体Aと完全非弾性衝突した。衝突する直前の物体Bの速度は $\boxed{⑥}$ である。衝突後、両物体は合体し、衝突直後の両物体の速度は $\boxed{⑦}$ である。その後、衝突後、両物体は $\boxed{⑧}$ 降下するまで加速し、その後、減速しながら両物体が降下し、その後、合体した両物体は周期 $\boxed{⑨}$ の単振動を続ける。

問1 上の文章の空欄に適当な数式を入れなさい。

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨

問2 合体した物体の単振動の振幅を求めなさい。

問3 合体した物体の最下点までの降下距離を求めなさい。

問4 物体Aの落下距離 h を大きくすると、物体A、Bが合体した後上昇する途中に分離することがある。物体A、Bが上昇中分離するための h の条件を求めなさい。

新作問題シリーズ　第８回　単振動　　解答・解説

問1［A］ 物体Aのつりあいより、$mg=kx_0$ だから、$x_0=\dfrac{mg}{k}$ …① 伸びたところで静止する。ばねの自然長位置を重力による位置エネルギーの基準として、力学的エネルギー保存の法則より、x_1 下がった位置が最下点とすると、$0=\dfrac{1}{2}kx_1^2-mgx_1$ だから、$x_1=\dfrac{2mg}{k}$ …② 下がったところが最下点になる。同様に、x 下がった位置での速度を v とすると、力学的エネルギー保存の法則より $0=\dfrac{1}{2}kx^2-mgx+\dfrac{1}{2}mv^2$ だから、図１のように、$v=\sqrt{-\dfrac{k}{m}x^2+2gx}$ より、$v=\sqrt{-\dfrac{k}{m}\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)^2+\dfrac{mg^2}{k}}$ だから、速度最大は、$x=\dfrac{mg}{k}$ のとき、$v=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ …③ である。物体Aについてのつりあいの位置から、下に x ずれた位置での運動方程式をつくる $mg-k\left(\dfrac{mg}{k}+x\right)=ma$ より、$a=-\dfrac{k}{m}x$ である。単振動の公式 $a=-\omega^2x$ と比較して、単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ だから、周期の公式に代入して求めると、この単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ …④ である。

［B］ 衝突直前の物体Bの速度を v とすると、力学的エネルギー保存の法則より、$mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$ だから、衝突直前の物体Bの速度は $v=\sqrt{2gh}$ …⑤ である。運動量保存の法則より、$m\sqrt{2gh}=2mv'$ だから、衝突直後の速度は $v'=\dfrac{\sqrt{2gh}}{2}$ …⑥ である。単振動の速度最大は中心位置（つりあいの位置）だから、中心位置はばねの伸び $x_2=\dfrac{2mg}{k}$ 、合体直後の位置 $x_0=\dfrac{mg}{k}$ だから、加速する区間は x_2-x_0 より、両物体は $x_2-x_0=\dfrac{2mg}{k}-\dfrac{mg}{k}=\dfrac{mg}{k}$ …⑦ 降下するまで加速する。また、つりあいの位置 $\dfrac{2mg}{k}$ を原点として、x 下がった位置での運動方程式は $2ma=2mg-k\left(\dfrac{2mg}{k}+x\right)$ より、$a=-\dfrac{k}{2m}x$ である。よって、角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ だから、周期は $T'=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$ …⑧ である。

問2 単振動の公式は、変位が $x=A\sin\omega t$ 、速度が $v=A\omega\cos\omega t$ だから、$x^2+\left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2=A^2$ が成立する。合体した直後について適用してみると、変位（単振動の中心からのずれ）

$x=x_0-x_2=-\frac{mg}{k}$ 、速度 $v=\frac{\sqrt{2gh}}{2}$ 、角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}$ を代入すると、

$\left(-\frac{mg}{k}\right)^2+\left\{\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2}\right)/\sqrt{\frac{k}{2m}}\right\}^2=A^2$ だから、 $\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{mgh}{k}=A^2$ より、単振動の振幅は

$A=\sqrt{\frac{mg(mg+kh)}{k^2}}$ である。

問3 中心位置 x_2 より振幅 A だけ下だから、降下距離

$d=\left(\frac{2mg}{k}-\frac{mg}{k}\right)+\sqrt{\frac{mg(mg+kh)}{k^2}}=\frac{mg+\sqrt{mg(mg+kh)}}{k}$ である。

別解 力学的エネルギー保存の法則より、

$\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}+d\right)^2-2mgd$ だから、 $kd^2-2mgd-mgh=0$

より $d=\frac{mg\pm\sqrt{(mg)^2+kmgh}}{k}=\frac{mg+\sqrt{mg(mg+kh)}}{k}$ （d 正より負符号不適）

問4 単振動の加速度が下向きに g になるとき、上向きの慣性力が重力より大きくなれば物体Bが浮き上がる。単振動の加速度の公式より $a=-\frac{k}{2m}x>g$ だから、単振動の中心から $\frac{2mg}{k}$ 以上上の所だ。これは振幅が $\frac{2mg}{k}$ 以上あればよいことだから、

$A=\sqrt{\frac{mg(mg+kh)}{k^2}}>\frac{2mg}{k}$ より、 $\frac{mg(mg+kh)}{k^2}>\frac{4m^2g^2}{k^2}$ である。だから、物体Bの落下距離は $h>\frac{3mg}{k}$ であればよい。