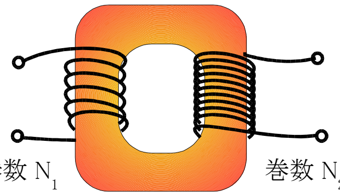
新作問題シリーズ 第９回　自己誘導と相互誘導



次の文章を読んで、下の各問いに答えなさい。

鉄芯にコイルが巻かれた変圧器がある(右図)。1 次コイルの巻数 N_1 回、2 次コイルの巻数 N_2 回が巻かれている。
なお、鉄芯の断面積は S 、鉄芯の周の長さ L 、透磁率は μ とする。また、鉄芯から外に磁束は漏れないものとする。

一般に、周の長さ L の鉄芯にコイルを N 回巻き、電流を I 流したときに鉄芯中に出来る磁界の強さは $H=\dfrac{NI}{L}$ と表すことができるとする。

最初、2 次コイルには何も付けずに、1 次コイルだけに電流 $i_1=I_1\cdot\sin\omega t$ を流した。1 次コイルが作る磁界の強さは $\boxed{①}$ 、磁束密度は $\boxed{②}$ と表すことができる。よって、鉄芯内の磁束は $\boxed{③}$ と書ける。

電磁誘導の法則より、1 次コイルに生じる電圧(自己誘導起電力)を考えよう。

時刻 t から $t+\Delta t$ の間を考える。磁束の変化は $\boxed{④}$ になる。このとき、 $\Delta t\approx 0$ が成立するので、近似式 $\sin\omega\Delta t\approx\omega\Delta t$ 、 $\cos\omega\Delta t\approx 1$ を適用して、磁束の変化は $\boxed{⑤}$ と近似できる。よって、1 次コイルに生じる自己誘導起電力は $\boxed{⑥}$ となる。よって、1 次側コイルの自己インダクタンスは $L_1=\boxed{⑦}$ とかける。同様に、2 次側コイルの自己インダクタンスは $L_2=\boxed{⑧}$ になる。

次に、相互誘導を考えてみよう。1 次コイルに電流が $I_1=I_1\cdot\sin\omega t$ 流れたとする。電磁誘導の法則より、2 次コイルに生じる誘導起電力は $\boxed{⑨}$ になるから、相互インダクタンスは $M=\boxed{⑩}$ と表せる。よって、2つの自己インダクタンス L_1 、 L_2 と相互インダクタンス M の間には $\boxed{⑪}$ の関係が成立することが分かる。

次に、変圧器(トランス)の原理を考えてみよう。1 次コイルに交流電源を、2 次コイルには R [Ω] の抵抗を接続する。このとき、1 次コイルに流れた交流電流によって、2 次コイルに相互誘導起電力(電圧)が生じ、2 次コイル側に接続した抵抗に電流が流れる。

1 次コイルに電流が $I_1=I_1\cdot\sin\omega t$ 流れているとする。このとき 2 次コイルに発生する誘導起電力は $\boxed{⑫}$ であるので、2 次コイルにつながれた抵抗には $I_R=\boxed{⑬}$ の電流が流れる。この 2 次コイルに流れる電流により作られる鉄芯内の磁束の変化が 1 次コイルに電磁誘導を起こす。

電流 I_R による磁束の変化は $\boxed{⑭}$ だから、1 次コイルに発生する誘導起電力は $\boxed{⑮}$ になる。 1 次コイルの自己誘導による電圧とあわせた電圧が 1 次コイルにかかっている電圧になるので、1 次側コイルの電圧は $\boxed{⑯}$ とかける。

1 次側コイル側の消費電力は $\boxed{⑰}$ だから、その平均消費電力は $\boxed{⑱}$ になる。

次に、2 次側の消費電力は $P_2=I_R^2\cdot R$ だから、平均消費電力は $\boxed{⑲}$ になり、1 次側と 2 次側の消費電力が等しいことが分かる。エネルギー保存の法則から、1 次側から流入したエネルギーが全て 2 次側から取り出されるため、**理論上は 「変圧器自体は発熱しない」 ことになる。**

新作問題シリーズ 第９回　自己誘導と相互誘導　解答･解説

２次側コイルに電流が流れないケース

最初、2 次コイルには何も付けずに、1 次コイルだけに電流 $i_1=I_1\cdot\sin\omega t$ を流した。1 次コイルが作る磁界の強さは $H_1=\left(\dfrac{N_1}{L}\right)\cdot I_1\cdot\sin\omega t$ ･･･①、磁束密度は $B_1=\mu H_1=\mu\left(\dfrac{N_1}{L}\right)\cdot I_1\cdot\sin\omega t$ ･･･② である。よって、鉄芯内の磁束は $\Phi_1=B_1 S=\mu S\left(\dfrac{N_1}{L}\right)\cdot I_1\cdot\sin\omega t$ ･･･③ になる。

電磁誘導の法則 $V=-N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ を使って誘導起電力を求めればよい。

時刻 t から $t+\Delta t$ の間での磁束の変化は $\Delta\Phi_1=\dfrac{\mu SN_1I_1}{L}\{\sin\omega(t+\Delta t)-\sin\omega t\}$ ･･･④ である。 $\Delta t\approx 0$ だから近似式 $\sin\omega\Delta t\approx\omega\Delta t$ 、 $\cos\omega\Delta t\approx 1$ が使えるので、④を整理すると $\sin\omega(t+\Delta t)\approx\sin\omega t+\cos\omega t\cdot\omega\Delta t$ とみなせるから $\Delta\Phi_1\approx\dfrac{\mu SN_1I_1}{L}\cos\omega t\cdot\omega\Delta t$ ･･･⑤である。よって、1 次コイルに生じる自己誘導起電力は $V=-N_1\dfrac{\mu SN_1I_1}{L}\cos\omega t\cdot\omega$ ･･･⑥ である。

$V=\dfrac{\mu SN_1^2}{L}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ より、1 次側コイルの自己インダクタンスは $L_1=\dfrac{\mu SN_1^2}{L}$ ･･･⑦、同様に、2 次側コイルの自己インダクタンスは $L_2=\dfrac{\mu SN_2^2}{L}$ ･･･⑧ と書ける。

相互誘導起電力で２次側コイルに電流が流れるケース

1 次コイルに電流が $I_1=I_1\cdot\sin\omega t$ 流れたとする。電磁誘導の法則より、2 次コイルに生じる誘導起電力は $V_2=-N_2\dfrac{\mu SN_1I_1}{L}\cos\omega t\cdot\omega=\dfrac{\mu SN_1N_2}{L}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ･･･⑨である。よって、相互インダクタンスは $M=\dfrac{\mu SN_1N_2}{L}$ ･･･⑩ と表せ、 $L_1L_2=M^2$ ･･･⑪ の関係が成立する。

※ 自己インダクタンスと相互インダクタンスの積は相互インダクタンスの２乗に等しい。

次に、2 次コイルに R [Ω] の抵抗を接続してあるので、2 次コイルに相互誘導起電力（電圧）が生じるので2次コイルに接続している抵抗に電流が流れる。

2 次コイルに発生する誘導起電力 $v_2=\dfrac{\mu SN_1N_2}{L}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ･･･⑫ であるので、2 次コイルにつながれた抵抗には $I_R=\dfrac{\mu SN_1N_2}{LR}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ･･･⑬ の電流が流れる。この電流により作られる鉄芯内の磁束の変化が 1 次コイルに電磁誘導を起こす。

電流 I_R による磁束は $\Phi_R=\mu S\left(\dfrac{N_2}{L}\right)\dfrac{\mu SN_1N_2}{LR}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ･･･⑭ だから、1 次コイルに生じる誘導起電力は $v_R=-\dfrac{\mu^2S^2N_1^2N_2^2}{L^2R}\cdot\omega^2 I_1\cdot\sin\omega t$ ･･･⑮ である。 1 次コイルの自己誘

導による電圧 $v_1=\frac{\mu S N_1^2}{L}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ とあわせた電圧が 1 次コイルにかかる電圧になるから、1 次コイルの電圧は $V_1=-\frac{\mu^2 S^2 N_1^2 N_2^2}{L^2 R}\cdot\omega^2 I_1\cdot\sin\omega t-\frac{\mu S N_1^2\omega}{L}I_1\cdot\cos\omega t$ ・・・⑯である。

1 次側の消費電力は $P_!=V_1\cdot I_1=\left(-\frac{\mu^2 S^2 N_1^2 N_2^2}{L^2 R}\cdot\omega^2 I_1\cdot\sin\omega t-\frac{\mu S N_1^2\omega}{L}I_1\cdot\cos\omega t\right)\cdot I_1\sin\omega t$ ・・・⑰ だから、その平均消費電力は $\bar{P}_!=\frac{\mu^2 S^2 N_1^2 N_2^2}{2L^2 R}\cdot\omega^2 I_1^2$ ・・・⑱ になる。

次に、2 次側の消費電力は $P_2=I_R^2\cdot R$ となり、 $P_2=\left\{\frac{\mu S N_1 N_2}{L R}\cdot I_1\omega\cdot\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2\cdot R$ である。よって、平均消費電力は $P_2=\frac{\mu^2 S^2 N_1^2 N_2^2}{2L^2 R}\cdot I_1^2\omega^2$ ・・・⑳ になる。

※ $\sin\omega t\cos\omega t$ の項は平均するとゼロになるが、 $\sin^2\omega t$ や $\sin^2\omega t$ の項は平均するとゼロにはならない。

以上より、1 次側と 2 次側の消費電力が等しいことが分かる。エネルギー保存の法則を適用すると、1 次側から流入したエネルギーが全て 2 次側から取り出されるため、「変圧器自体は発熱しない」ことになる。工夫をしないと鉄芯に渦電流が多量に流れるので、無視できないほど発熱する。実際の変圧器では、渦電流が流れにくいように鉄芯に工夫をしている（自分で調べてみよう！）。

［別解］ 別の見方をしてみよう。最初に 1 次コイルの電圧を決めるところから始める。

1 次コイルにかけた電圧を $v_1=V_1\sin\omega t$ 、2 次コイルに流れる電流を I_1 、 I_2 とする。

両電流により作られる鉄芯内の磁界の強さは $H=\left(\frac{N_1}{L}\right)I_1+\left(\frac{N_2}{L}\right)I_2$ である。棒の中の磁束密度は $B=\mu H=\mu\left(\frac{N_1 I_1+N_2 I_2}{L}\right)$ より、コイルを貫く磁束 $\Phi=B S=\mu S\left(\frac{N_1 I_1+N_2 I_2}{L}\right)$ になる。よって、両コイルに生じる電磁誘導の法則による誘導起電力は次のようになる。

1 次コイルに生じる誘導起電力は $v_1=-\frac{\mu S N_1}{L}\left(N_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+N_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)$ ・・・④

2 次コイルに生じる誘導起電力は $v_2=-\frac{\mu S N_2}{L}\left(N_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+N_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)$ ・・・⑤

この2式 ④、⑤より $\frac{v_1}{v_2}=\frac{N_1}{N_2}$ ・・・⑥ の関係式が得られる（変圧器の公式）。

ここで、1 次コイルにかけた電圧が $v_1=V_1\sin\omega t$ であるので、2 次コイルに発生する誘導電圧は $v_2=\frac{N_2}{N_1}V_1\sin\omega t$ ・・・⑦ となる。よって、2 次コイルにつないだ抵抗に流れる電流（2 次コイルの電流）は、オームの法則より $\frac{N_2 V_1}{N_1}\cdot\sin\omega t=I_2\cdot R$ ・・・⑧ となる。

以上、④、⑤、⑧の3式を連立方程式として解けばよい。まず、④に⑦、⑧ を代入して、 V_1 、

I_2 を消去すると $V_1 \sin\omega t = -\dfrac{\mu S N_1}{L}\left\{N_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} + N_2\left(\dfrac{V_1 N_2 \omega}{N_1 R}\right)\cos\omega t\right\}$ が得られる。これを整理して $\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\dfrac{V_1 L}{\mu N_1^2 S}\sin\omega t - \left(\dfrac{N_2^2 V_1 \omega}{N_1^2 R}\right)\cos\omega t$ が得られる。これを積分して 1 次コイル側に流れる電流 I_1 を求めると、$I_1 = V_1\left\{\dfrac{L}{\mu\omega N_1^2 S}\cos\omega t - \left(\dfrac{N_2^2}{N_1^2 R}\right)\sin\omega t\right\}$ である。

そこで 1 次コイル側と、2 次コイル側のそれぞれの消費電力を求めてみよう。1 次コイル側の消費電力は $P_1 = V_1 \times I_1$ 、2 次コイル側の消費電力は $P_2 = V_2 \times I_2$ より、次のようになる。

1 次コイル側： $P_1 = V_1 \sin\omega t \times V_1\left\{\dfrac{L}{\mu\omega N_1^2 S}\cos\omega t - \left(\dfrac{N_2^2}{N_1^2 R}\right)\sin\omega t\right\}$ だから、

$P_1 = \dfrac{L C_1^2}{\mu\omega N_1^2 S}\sin\omega t \cos\omega t - \left(\dfrac{N_2^2 V_1^2}{N_1^2 R}\right)\sin^2\omega t$ である。平均消費電力は $\bar{P}_1 = \dfrac{N_2^2 V_1^2}{2 N_1^2 R}$ である。

2 次コイル側： $P_2 = \dfrac{N_2 V_1 \sin\omega t}{N_1} \times \dfrac{N_2 V_1 \sin\omega t}{N_1 R}$ だから、 $\bar{P}_2 = \dfrac{N_2^2 V_1^2}{2 N_1^2 R}$ になる。

よって、1 次コイル側、2 次コイル側の平均消費電力は同じになる。