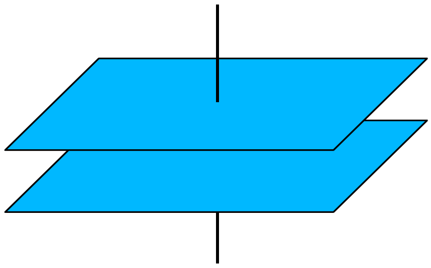
新作問題シリーズ　第12回　球形型のコンデンサーの電気容量

Ⅰ　次の文章を読んで下の問いに答えなさい。ただし k_0 はクーロンの法則の比例定数)である。

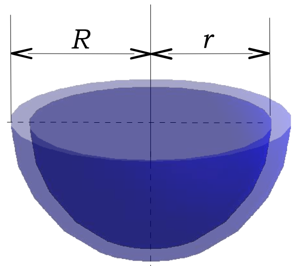
1. Q [C] の電荷から出る（入る）電気力線の本数を $4\pi k_0 Q$ 本である
2. 単位面積あたりの電気力線の本数が電界に等しい
3. コンデンサーの電気容量は、コンデンサーに蓄えられた電気量を電圧で割った商である

以上の関係を使ってコンデンサーの電気容量を求めてみよう。最初は、面積を S [m²] の板状の電極を極板間の距離を d [m] で2枚を平行に配置した平行板コンデンサーを考える。両極板にそれぞれ $\pm Q$ [C] の電荷を与える。正負の極板から出入りする電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ であり、電気力線は電極間にしか存在しないから、電気力線の密度は



$\boxed{\quad ① \quad}$ になる。よって、極板間に生じる電界は $\boxed{\quad ② \quad}$ [V/m] である。よって、極板間の電圧(電位差)は $\boxed{\quad ③ \quad}$ になるので、このコンデンサーの電気容量は $\boxed{\quad ④ \quad}$ と表すことができる。

次に、半径を r [m] の球形電極の外側を内径 R [m] の球形電極が中心を合わせて包み込むコンデンサーを作る。内外電極に $\pm Q$ [C] の電荷を与えると、正負の極板から出入りする電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ である。中心から x [m]（ $r<x<R$ ）の位置での電気力線の密度は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ であるから、中心から x [m] の位置での電界は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ [V/m] である。この場合、電界の強さが位置 x の関数となるため、位置により変化するので極板間の電圧(電位差)を平行板コンデンサーのように求めることは出来ない。



球型コンデンサーを
半分に切った図

そこで、電界が $E=\dfrac{k}{x^2}$ の関係式が成立するとき、 $x=r$ から $x=R$（ただし、 $r<x<R$)の区間をN個の微小区間に区切り、位置を x_i（ $i=0,1,2,3\ldots N$ ）と決めるよう。その位置は

$x_0=r$ 、・・・、 $x_i=r+\dfrac{(R-r)i}{N}$ 、・・・、 $x_N=R$ と表せる。また、 N が大きいとき、ある微小区間(x_{k-1} から x_k)の電界は $E_i=\dfrac{k}{x_{i-1}\cdot x_i}$ と近似することができる。微小区間の電圧(電位差) V_i は $V_i=\left(\dfrac{k}{x_{i-1}\cdot x_i}\right)\times(x_i-x_{i-1})$ だから $V_i=k\left(\dfrac{1}{x_{i-1}}-\dfrac{1}{x_i}\right)$ である。 $x=r$ から $x=R$ の間の電圧は $V=V_1+V_2+\cdots+V_N$ と表せるので、その間の電圧は $V=k\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$ になる。

これを適用すると、この球型コンデンサーの極板間の電圧は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ になるから、この球型コンデンサーの電気容量は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ と表すことができる。

問　上の文章の空欄①から⑧に、それぞれ数式と単位を入れなさい。

新作問題シリーズ　第12回　球形型のコンデンサーの電気容量　　解答・解説

「 Q [C] の電荷から出る(入る)電気力線の本数を $4\pi k_0 Q$ 本である(ただし、 k_0 はクーロンの法則の比例定数)」、「単位面積あたりの電気力線の本数が電界に等しい」、「コンデンサーの電気容量は、コンデンサーに蓄えられた電気量を電圧で割った商である」の以上の関係を使ってコンデンサーの電気容量を求めてみよう。

① 平行板コンデンサー

平行板電極の面積を S [m²]、極板間の距離を d [m] とする。極板に $\pm Q$ [C] 蓄えられているとする。正負の極板から出入りする電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ である。電気力線は電極間にしか存在しないので、電気力線の密度は $\dfrac{4\pi k_0 Q}{S}$ [本/m²]･･･① である。よって、極板間の電界は $E=\dfrac{4\pi k_0 Q}{S}$ [V/m] ･･･② である。よって、極板間の電圧(電位差)は $V=Ed=\dfrac{4\pi k_0 Qd}{S}$ [V] ･･･③ となり、 $C=\dfrac{Q}{V}$ より、電気容量は $C=\dfrac{S}{4\pi k_0 d}$ [F]･･･④ である。また、 $\epsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k_0}$ （真空の誘電率という）として、 $C=\dfrac{\epsilon_0 S}{d}$ とも表せる。

② 球型コンデンサー

内側の球形電極の半径を r [m] とし、その外側を半径 R [m] の球形電極を中心を合わせて包み込んだコンデンサーを作る。内外電極に $\pm Q$ [C] の電荷を与える。正負の極板から出入りする電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ である。中心から x [m] ($r<x<R$) の位置での電気力線の密度は $\dfrac{4\pi k_0 Q}{4\pi x^2}=\dfrac{k_0 Q}{x^2}$ [本/m²]･･･⑤ である。よって、中心から x [m] の位置での電界は $E=\dfrac{k_0 Q}{x^2}$ [V/m] ･･･⑥ である。

電界が $E=\dfrac{k}{x^2}$ のとき、 $x=r$ から $x=R$ の間の電圧は $V=k\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$ になるのだから、両極板間の電圧(電位差)は $V=k_0 Q\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$ [V] ･･･⑦ となる。よって、この電気容量は $C=\dfrac{rR}{k_0(R-r)}$ [F] ･･･⑧ である。

［別解］　極板間の電位差は電界を距離で成分すれば求まる。これを使えば分かりやすい。

電界は $E=\dfrac{k_0 Q}{x^2}$ だから、極板間の電位差(電圧)は $V=\int_r^R E\,dx$ であるので、積分を実行すればよい。 $V=\int_r^R \dfrac{k_0 Q}{x^2}dx=\left|-\dfrac{k_0 Q}{x}\right|_r^R$ であるので、 $V=k_0 Q\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$ である。以下同じだから、省略する。