新作問題リーズ 第14回　コンデンサーのエネルギーを蓄える

次の文章を読んで、空欄に適当な数式を入れなさい。

コンデンサーは電気エネルギーを蓄えることができる。コンデンサーの電気容量 C [F] とコンデンサーに加えた電圧 V [V] を用いて表すと、コンデンサーに蓄えられたエネルギー U [J] は U = ① ･･･(a) と表すことが出来る。

電気容量 C [F] のコンデンサーに電気抵抗値 R [Ω] の抵抗を通して、起電力 V_0 [V] の電池を接続して実際にコンデンサーにエネルギーを蓄えてみよう。

十分に時間がたったとき、電池から流れ出た電気量は ② [C] であり、電池が供給したエネルギーは ③ [J] である。公式(a) によるとコンデンサーには ④ [J] のエネルギーが蓄えられることになる。したがって、抵抗で消費されたエネルギーは ⑤ [C] であることが分かる。

では、公式(a) を使わずに、上と同様の設定でコンデンサーに充電する場合に蓄えられるエネルギーを求めてみよう（すなわち、公式(a) を導びくことと同義）。

時刻 t [s] のとき、コンデンサーの電圧を V [V]、流れる電流を I [A] としよう。もちろん、電圧 V 、電流 I は共に時刻 t の関数である。

微小時間 Δt [s] 経過したとき（時刻 $t+\Delta t$ [s] のとき）、その間での電流変化は無視できるとして、微小時間 Δt の間に、コンデンサーに流れ込む電気量を ΔQ とすると、エネルギーの増加分は ΔU = ⑥ [J] と表すことができる。

コンデンサーの公式 $Q=CV$ を ⑥ に適用して Vを消去すると ΔU = ⑦ となる。

最終的な電気量が $Q_0=CV_0$ [C] より、コンデンサーの充電過程を電気量が $\Delta Q=\dfrac{Q_0}{N}$ [C] ずつ増加するように N 段階に分けて考える（ N は十分に大きな数）。すなわち第 k 段階では $Q_{k-1}=\dfrac{(k-1)Q_0}{N}$ から $Q_k=\dfrac{kQ_0}{N}$ に電気量が変化する。

第 k 段階のエネルギー増加を ΔU_k = ⑧ [J] となる。コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \cdots + \Delta U_N$ と表すことができるので、それぞれのエネルギー増加を代入し、数学の公式 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を当てはめて整理すると、コンデンサーのエネルギーの総和は U = ⑨ となる。 N は十分に大きな数だから、極限値を求め、整理すると U = ① が得られ、コンデンサーに蓄えられるエネルギーの公式が導かれた。

新作問題リーズ 第14回　コンデンサーのエネルギーを蓄える　　解答・解説

コンデンサーは電気エネルギーを蓄えることができる。コンデンサーの電気容量 C [F] とコンデンサーに加えた電圧 V [V] を用いて表すと、コンデンサーに蓄えられたエネルギー U [J] は $U = \frac{1}{2}CV^2$ ・・・① と表すことが出来る。

電気容量 C [F] のコンデンサーに電気抵抗値 R [Ω] の抵抗を通して、起電力 V_0 [V] の電池を接続して実際にコンデンサーにエネルギーを蓄えてみよう。

十分に時間がたったとき、電池から流れ出た電気量は CV_0 ・・・②[C] であり、電池が供給したエネルギーは CV_0^2 ・・・③ [J] である。このとき、コンデンサーには $\frac{1}{2}CV_0^2$ ・・・④[J] のエネルギーが蓄えられるので、抵抗で消費されたエネルギーは $CV_0^2-\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{1}{2}CV_0^2$ ・・・⑤[C] であることが分かる。

では、上と同様の設定でコンデンサーに充電する場合に蓄えられるエネルギーを計算で求めてみよう(すなわち、公式 $U = \frac{1}{2}CV^2$ を導びくことと同義)。

時刻 t [s] のとき、コンデンサーの電圧を V [V]、流れる電流を I [A] としよう。もちろん、電圧 V 、電流 I は共に時刻 t の関数である。

微小時間 Δt [s] 経過したとき(時刻 $t+\Delta t$ [s] のとき)、その間での電流変化は無視できるとして、微小時間 Δt の間に、コンデンサーに流れ込む電気量を ΔQ [C] とすると、エネルギーの増加分は $\Delta U = V\Delta Q$ ・・・⑥[J] と表すことができる。

コンデンサーの公式 $Q=CV$ を $\boxed{⑥}$ に適用して Vを消去すると $\Delta U = \frac{Q}{C}\Delta Q$ ・・・⑦ となる。

最終的な電気量が $Q_0=CV_0$ [C] より、コンデンサーの充電過程を電気量が $\Delta Q=\frac{Q_0}{N}$ [C] ずつ増加するように N 段階に分けて考える(N は十分に大きな数)。すなわち第 k 段階では $Q_{k-1}=\frac{(k-1)Q_0}{N}$ から $Q_k=\frac{kQ_0}{N}$ に電気量が変化する。

第 k 段階のエネルギー増加を $\Delta U_k = \frac{Q_{k-1}}{C}\cdot\Delta Q=\frac{(k-1)Q_0^2}{CN^2}$ ・・・⑧[J] となるので、コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \cdots + \Delta U_N$ であるので、

$U = \frac{(0)Q_0^2}{CN^2} + \frac{(1)Q_0^2}{CN^2} + \frac{(2)Q_0^2}{CN^2} \cdots + \frac{(k-1)Q_0^2}{CN^2} = \frac{Q_0^2}{CN^2}\{1+2+\cdots+(N-1)\}$ である。

数学の公式 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ を使って整理すると $U = \frac{Q_0^2N(N-1)}{2CN^2}$ ・・・⑨である。 N は十分に大きな数だから極限値を求めると、 $U = \frac{Q_0^2}{2C}=\frac{1}{2}CV_0^2$ である。これに、

$Q_0=CV_0$ を使って整理すると、 $U=\frac{1}{2}CV_0^2$ が得られる。