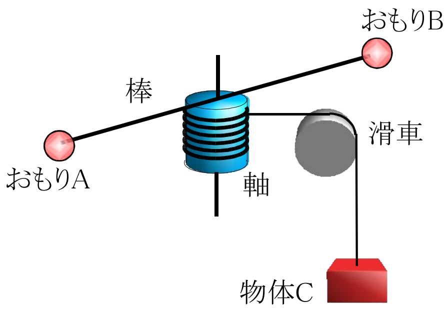
新作問題シリーズ 第 15 回 物体の回転を考える

次の文章を読んで、空欄に適当な数式、関係式を入れなさい。

両端に質量 m [kg] の小さなおもり A、B が付けられた長さ $2L$ [m] で質量が無視できる棒がある。この棒の中央に半径が r [m] の質量が無視できる軸を取り付け、水平面で滑らかに回転するように設置した。



質量 M [kg] の物体 C を取り付けた軽い糸を軸に巻きつけ、軽い滑車を通して物体 C をぶら下げた。物体 C を静かに離したところ、物体 C が下がり、おもり A は軸を中心に回転運動を始めた。

ある時刻 t [s] のとき、物体 C の位置が手を離した位置から d [m] 下がり、速度 V [m/s] であるとしよう。このときのおもり A、B の速度 v [m/s] は V を使って表すと v = ① と表すことができる。力学的エネルギー保存の法則より ② が成立するので、それぞれの速度を d を用いて表すと、おもり A、B の速度は v = ③ 、物体 C の速度は V = ④ と表すことができる。

物体 C の降下距離と速度の関係から、物体 C の運動は等加速度運動であることが分かる。このときの物体 C の加速度は ⑤ であるから、このときの糸の張力は ⑥ である。

次に、時刻 t のときのおもり A、B と物体 C の位置を考えてみよう。物体 C 運動は等加速度運動だから、物体 C の降下距離は ⑦ になる。また、物体 C が下降した距離分だけ軸が回転するので、おもり A、B の回転角は ⑧ [rad] である。

①	②
③	④
⑤	⑥
⑦	⑧

新作問題シリーズ 第15回 物体の回転を考える　解答・解説

ある時刻 t [s] のとき、物体Cの位置が手を離した位置から d [m] 下がり、物体Cの速度 V [m/s] であるとしよう。

物体Cの下降した距離分だけ軸を回転させるので、微小時間 Δt での降下距離は $V\Delta t$ になる。この長さ分だけ軸を回転させるので回転角は $\theta=\dfrac{V\Delta t}{r}$ になる。よって軸の角速度は $\omega=\dfrac{\theta}{\Delta t}=\dfrac{V}{r}$ である。よって、おもりA、Bの速度は $v=L\omega$ になるので、おもりA、Bの速度 v [m/s] は V を使って表すと $v=\dfrac{LV}{r}$ [m/s]・・・① と表すことができる。

また、力学的エネルギー保存の法則より $Mgd=\dfrac{1}{2}mv^2\times2+\dfrac{1}{2}MV^2$ ・・・②が成立する。

①を②に代入して $Mgd=m\left(\dfrac{LV}{r}\right)^2+\dfrac{1}{2}MV^2$ だから、 $V=\sqrt{\dfrac{2Mgdr^2}{2mL^2+Mr^2}}$ 、これを①に代入して $v=\sqrt{\dfrac{2MgdL^2}{2mL^2+Mr^2}}$ であるから、おもりA、Bの速度は $\sqrt{\dfrac{2MgdL^2}{2mL^2+Mr^2}}$ [m/s]・・・③、物体Cの速度は $\sqrt{\dfrac{2Mgdr^2}{2mL^2+Mr^2}}$ [m/s]・・・④ と表すことができる。

等加速度運動では $v^2-v_0^2=2ax$ という距離と速度の関係が成立する。物体Cの運動では $V^2-0^2=2\left(\dfrac{Mgr^2}{2mL^2+Mr^2}\right)d$ となり、物体Cの等加速度運動は $\dfrac{Mgr^2}{2mL^2+Mr^2}$ [m/s²]・・・⑤ であることが分かる。

物体Cの加速度を A 、糸の張力を T として、運動方程式を作ると $Mg-T=MA$ である。これに ⑤を代入して整理すると、糸の張力は $T=\dfrac{2mMgL^2}{2mL^2+Mr^2}$ [N]・・・⑥ である。

時刻 t のときのそれぞれの位置を考える。等か速度運動の公式 $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ より、物体Cが $d=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Mgr^2}{2mL^2+Mr^2}\right)t^2$ [m] ・・・⑦ だけ降下した位置になる。また、おもりA、Bの回転角は $\theta=\dfrac{d}{r}$ より、おもりA、Bは $\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Mgr}{2mL^2+Mr^2}\right)t^2$ [rad] ・・・⑧ だけ回転している。

［参考］ ⑧に⑥を代入すると $\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N}{2mL^2}\right)t^2$ である。等加速度運動の公式 $x=\dfrac{1}{2}at^2$ からの連想として、角加速度 $\alpha=\dfrac{N}{2mL^2}$ とすることが出来る。 $I=mL^2\times2$ を棒とおもりA、Bの回転の難しさ（慣性能率：回転運動における質量のようなもの）を表す物理量といえる。

並進運動の加速度 a （回転運動の角加速度 α ）と並進運動の質量 m （回転運動の慣性能率 I ）の積が並進運動時の力 f （回転運動のモーメント N ）に等しくなる並進運動の運動方程式 $f=ma$ （回転運動の運動方程式 $N=I\alpha$ ）というように、並進運動と回転運動は同じ形の法則が成立する。