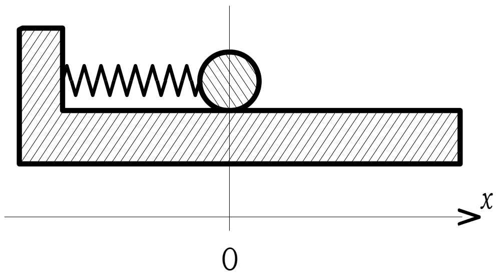
新作問題研究　第１７回　単振動（応用）

次の文章を読んで下の各問いに答えなさい。



ばね定数 k [N/m]、質量が無視できるばねの一端を質量 M [kg] のなめらかな台の壁に固定した。ばねの他端には質量 m [kg] の小物体Aをつけた。なお、台は床に固定しているとする。

小物体Aに力 F_0 [N] を右向きに加えたて、ばねを ① [m] 伸ばした。その後、小物体Aから静かに手を離した。手を離すと、小物体は左に動き始めた。

ばねが x [m] 伸びている位置を通過するときの小物体Aの加速度を a [m/s^2] とするとき、小物体Aの運動方程式は ② となり、そのときの加速度は ③ とかける。よって、この単振動の振動数は ④ [Hz] であることが分かる。よって、手を離してからの時刻 t [s] のときの小物体Aの位置 x を t を用いて表すと、$x =$ ⑤ となる。

(1) 上の文章の空欄①から⑤に、適当な数式、関係式を書きなさい。

①	②	③
④	⑤	

次に、台の固定をはずし、台が床の上を自由に滑るようにし（摩擦力は無視できる）、台、小物体Aともに静止した状態にした。

続いて、台の左側面に質量 m [kg] の物体Bを速度 v_0 [m/s] で衝突させた。ただし、このときの衝突は弾性衝突であるとし、物体Bは台には再び衝突することはなかったとする。

(2) 衝突直後の台と小物体Aの速度を求めなさい。

(3) 台から見た小物体Aは単振動運動を行うが、その単振動の周期を求めなさい。

(4) 台から見た小物体Aは単振動運動を行うが、その単振動の振幅を求めなさい。なお、衝突直後の台の速度を V_0 とする。

新作問題研究　第１７回　単振動（応用）

(1) フックの法則より、力 F_0 [N] を加えたときのばねの伸びを x_0 [m] とすると $F_0=kx_0$ が成立する。$x_0=\dfrac{F_0}{k}$ だから、力 F_0 [N] を加えたとき、ばねを $\dfrac{F_0}{k}$ ･･･① [m] 伸ばす。

ばねが x [m] 伸びているときの小物体Ａの加速度を a [m/s^2] とする。小物体Ａに働く力はばねの力 kx [N] だけが左向きに加わる。物体の運動方程式は $ma=-kx$ ･･･② となり、加速度は $a=-\dfrac{kx}{m}$ ･･･③ だ。単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ より、この単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。周期の公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より、周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 、振動数と周期の公式 $f=\dfrac{1}{T}$ より、振動数は $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ･･･④ [Hz] である。 **※ 基本問題！**

手を離したとき（ $t=0$ のとき）小物体Ａは「初速度ゼロ」で「伸びが最大」である。公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、$v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ に代入して $\dfrac{F_0}{k}=A\sin\delta$ 、$0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\delta$ だから、$\delta=\dfrac{\pi}{2}$ 、$A=\dfrac{F_0}{k}$ であるので、$x=\dfrac{F_0}{k}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。よって、ばねの伸びを式で表すと $x=\dfrac{F_0}{k}\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ ･･･⑤ となる。 **※ ⑥は一流の問題！**

(2) 台の左側面に質量 m [kg] の物体Ｂを速度 v [m/s] で衝突させた。**「ばねの伸びがゼロだからばねからの力ゼロ」** になるので、物体Ａは衝突時に力積を受けない。よって運動量変化はないから、物体Ａの速度は変化せず、物体Ａの速度はゼロのままである。

一方、台は、**「衝突時にばねから受ける力はゼロだから運動量は保存する」** のだから、**「運動量保存の法則」** より $mv=MV'+mv'$ ･･･① が成立する。

「弾性衝突だから、はねかえり係数が１である」 から、$1=-\dfrac{v'-V'}{v}$ ･･･② も成立する。

これより、①、② を解いて、$V'=\dfrac{2mv}{M+m}$ だから、衝突直後の台の速度は $\dfrac{2mv}{M+m}$ である。

(3) 台の加速度を A [m/s^2] のとき、台から見た小物体Ａの運動を考え、小物体の加速度を a [m/s^2] とする。ばねが x [m] 伸びているとすると、台の運動方程式は、台が受ける力はばねの力 kx [N] だけだから $MA=kx$ ･･･① である。また、小物体Ａの運動方程式は、ばねの力が $-kx$ 、慣性力が $-mA$ より $ma=-kx-mA$ ･･･② である。以上の2式より、

$a=-\dfrac{kx}{m}-\dfrac{kx}{M}=-\dfrac{k(M+m)}{Mm}x$ より、台に対する小物体の加速度は $a=-\dfrac{k(M+m)}{Mm}x$ である。単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ と比較して $\omega=\sqrt{\dfrac{k(M+m)}{Mm}}$ 。周期の公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ より、$T=2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$ になる。よって、小物体は台の上で $2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}$ の周期で単振動する。 **※ これは一流の問題！**

(4) ばねが最も縮んだとき（伸びたとき）の両者の速度を v 、ばねの縮みを x_0 とする。エネルギー保存の法則より $\dfrac{1}{2}MV_0^2=\dfrac{1}{2}(M+m)v^2+\dfrac{1}{2}kx_0^2$ が成立する。また、運動量保存の法則より $MV_0=(M+m)v$ 、が成立するから、$x_0=\pm\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}\cdot V_0$ である。よって、台から見た物体Ａの単振動の振幅は $\sqrt{\dfrac{Mm}{k(M+m)}}\cdot V_0$ [m] である。 **※ これは一流の問題！**