

新作問題研究
 第19回
 運動量とエネルギー（力学）

次の文章を読んで空欄に数式、関係式を入れなさい。なお、重力加速度を g $[\text{m/s}^2]$ とする。

質量 m $[\text{kg}]$ の物体と、質量 M $[\text{kg}]$ 、傾斜角 θ $[\text{rad}]$ の斜面台がある。物体と斜面台および、斜面台と床の摩擦は無視できるものとする。

最初に、物体を、図1に示すように斜面台に置き、物体から静かに手を離した。このとき、物体は斜面台を下に動きだしたが、斜面台は静止したままであった。

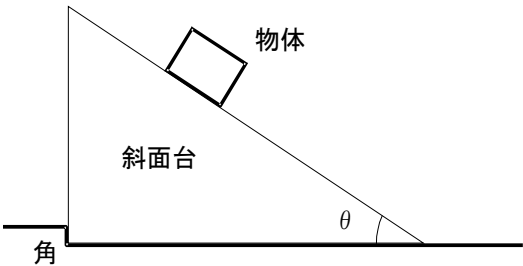


図1

物体の加速度を α $[\text{m/s}^2]$ とする。このとき、物体の運動方程式は ① になり、物体の加速度は ② $[\text{m/s}^2]$ 、物体が斜面台を押す力は ③ $[\text{N}]$ 、床の角にかかる水平方向の力は ④ $[\text{N}]$ である。

次に、図2のように斜面台の向きを逆に置き、物体から静かに手を離した。このとき、物体、斜面台の両方が動き出した。斜面台の加速度の大きさを A $[\text{m/s}^2]$ 、斜面台から見た物体の加速度の大きさを a $[\text{m/s}^2]$ 、物体が斜面台を押す力を N $[\text{N}]$ とする。

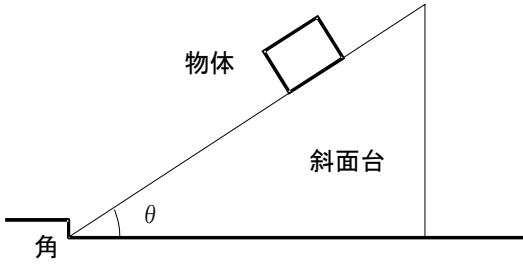


図2

床に対する斜面台の運動方程式は ⑤ であり、斜面台から見た物体の運動方程式は ⑥ になる。

右向きを正とすると、床から見た物体の水平方向の加速度は ⑦ $[\text{m/s}^2]$ である。物体と斜面台には水平方向の外力がないので、水平方向の運動量が保存する。このことから A 、 a の間には ⑧ の関係が成立することが分かる。これらより、斜面台の加速度は ⑨ $[\text{m/s}^2]$ であり、斜面台から物体に働く垂直抗力は ⑩ $[\text{N}]$ である。

①	②
③	④
⑤	⑥
⑦	⑧
⑨	⑩

新作問題研究 第19回 運動量とエネルギー（力学） 解答・解説

物体の加速度を α [m/s²] として、運動方程式が $m\alpha = mg \sin \theta \dots ①$ より、加速度は $\alpha = g \sin \theta \dots ②$ [m/s²] である。また、物体が斜面台を押す力 $mg \cos \theta \dots ③$ [N]、床の角に加わる水平方向の力は $mg \sin \theta \cos \theta \dots ④$ [N] である。

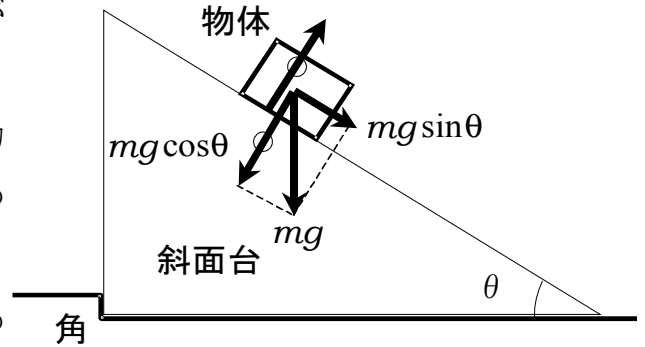


図1

次に、図2(斜面に垂直な方向の力の丸印は不要)のように斜面台の向きを逆にすると、物体から斜面台にかかる力が右向き成分を持つので斜面台が右向きに動き出すことがわかる。斜面台の加速度の大きさを

A [m/s²]、斜面台から見た(相対運動)物体の加速度の大きさを a [m/s²]、物体が斜面台を押す力を N [N] とすると、床に対する斜面台の運動方程式は $MA = N \sin \theta \dots ⑤$ 、斜面台から見た物体の運動方程式(相対運動だから慣性力を考える)は

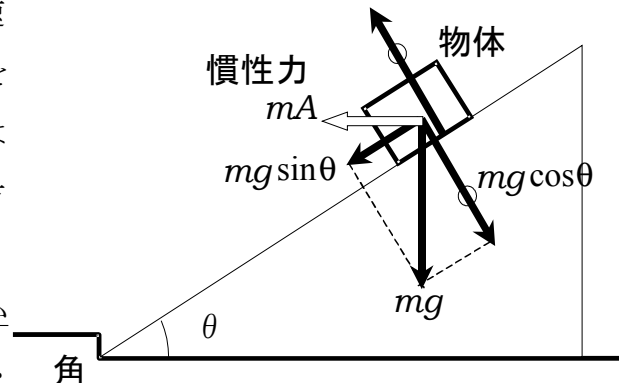


図2

$ma = mg \sin \theta + mA \cos \theta \dots ⑥$ になる。また、床から見た物体の水平方向の加速度は $-a \cos \theta + A \dots ⑦$ [m/s²] になる。両物体には「**水平方向の外力が働かないから水平方向の運動量が保存する**」ことに注目すればよい。このとき $m(-a \cos \theta + A)t = MA t \dots ⑧$ の関係が成立する。

⑥より $a = g \sin \theta + A \cos \theta \dots (1)$ 、また、⑧より $0 + 0 = m(A - a \cos \theta) + MA \dots (2)$ (2)に(1)を代入し $0 = m(A - g \sin \theta \cos \theta - A \cos^2 \theta) + MA$ が成立するので、斜面台の加速度は

$A = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \dots ⑨$ である。また、⑨を⑤に代入して整理すると、斜面台から物体に働く垂直

抗力は $N = \frac{M mg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \dots ⑩$ [N] が求まる。【コメント】⑨と⑩は難しいですね(当然一流の問題です!)。

【別解】 台から見た物体は斜面に垂直方向には動かないので「**斜面台から見た物体に働く力で、斜面に垂直な成分はつりあいの力の関係となる**」【コメント】こちらの方が「物理らしい解法」ですね。

物体に働く力の斜面に垂直方向成分のつりあいより $mg \cos \theta - mA \sin \theta - N = 0$ の関係式が成立する。これに⑨より $A = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$ を代入し、斜面台から物体に働く垂直抗力を求めると

$N = \frac{M mg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$ が得られる。