

新作問題シリーズ 第21回 単振動の応用

次の文章を読んで下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度を g [m/s²] とする。

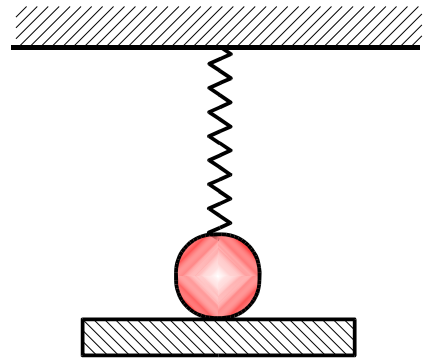
質量が m [kg] の小物体にばね定数が k [N/m] の軽いばねを取り付け、ばねの他端を天井に取り付けぶら下げた。質量 M [kg] の板を手で持って、板が水平になるように注意しながら小物体をばねが自然長になるまで持ち上げた。このときの位置を「はじめの位置」とする。

このとき、板を持ち上げている手の力は [N] であり、小物体がいたから受ける垂直抗力は [N] になる。

次に、「はじめの位置」から板を d [m] 下げても、小物体は板の上に乗っていた。小物体が板から受ける垂直抗力は [N] である。さらに板を下げてゆくと、はじめの位置から [m] 下がった位置で小物体が板から離れる。

また、「はじめの位置」から、板を瞬間的に下げた。このとき、小物体は、周期が [s]、振幅が [m] の単振動を続ける。

では、「はじめの位置」から、板を一定速度 V [m/s] で下げた。板から離れた小物体は振幅が [m] の単振動になる。



(1) 上の文章の空欄に適切な数式を入れなさい。

①	②
③	④
⑤	⑥
⑦	⑦

つぎに、「はじめの位置」から、板を、初速度 0 [m/s]、加速度 a [m/s²] で下げた。

(2) このとき、小物体が板から離れるのは、「はじめの位置」から板がどれだけ下がった位置になるか。

(3) このときの小物体の単振動の振幅を求めなさい。

新作問題シリーズ 第21回 単振動の応用 解答・解説

- (1) 板を持ち上げ手の力 F 、小物体が受ける垂直抗力(=小物体が板を押し力)を N とする。つりあいの関係より、板は $F - Mg - N = 0$ 、小物体は $N - mg = 0$ が成立する。よって、板を持ち上げる力 F は $(m+M)g$ …①、小物体が受ける垂直抗力 N は mg …② になる。

次に、ばねが d [m] 伸びたときも同様にして、小物体のつりあいから $N - mg + kd = 0$ が成立する。よって、小物体が板から受ける垂直抗力 N は $mg - kd$ …③ になる。小物体が板から離れるのは垂直抗力がなくなるときだから、 $\frac{mg}{k}$ …④ 下がった位置で板から離れる。

板を瞬間的に下るとき、小物体のつりあいの位置は $\frac{mg}{k}$ 下がった位置だ。そこを原点とし、鉛直上向きを正とする。 x の位置での小物体の運動方程式は $ma = k\left(\frac{mg}{k} - x\right) - mg$ である。よって $a = -\frac{k}{m}x$ だから、角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である。よって、公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より、周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ …⑤ である。速度ゼロの位置が $x = \frac{mg}{k}$ 、単振動の中心が $x = 0$ だから、振幅は $\frac{mg}{k}$ …⑥ である。板を瞬間的に下げたときを時刻ゼロとすると、

$$x = \frac{mg}{k} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad v = -\frac{mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \text{ である。}$$

板を速度 V [m/s] で下げたとき、板から離れるときの運動方程式は $ma = kx - mg$ だから、板から離れるのは $\frac{mg}{d}$ さがった位置で、周期は変わらず $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

$$\text{板から離れたときを時刻ゼロ、振幅を } A \text{ とすると、} x = -A \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

$$v = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \text{ と表せる。} t=0 \text{ のとき(板から離れるとき)、} x=0, \quad v=V \text{ だか}$$

ら、 $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$ より、振幅は $A = \sqrt{0^2 + \left(V\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2} = V\sqrt{\frac{m}{k}}$ …⑦ である。

- (2) 小物体の運動方程式を作ればよい。ばねが x 伸びているとき、 $ma = mg - kx - N$ だから、垂直抗力は $N = mg - kx - ma$ である。垂直抗力がゼロになったとき、小物体が板から離れるから $x = \frac{m(g-a)}{k}$ 下がった位置である。

- (3) 小物体が板から離れた直後の速度を v_0 とする。公式より $v_0^2 - 0^2 = 2a \times \frac{m(g-a)}{k}$ が成

立する。よって、板から離れる直後の速度は $v_0 = \sqrt{\frac{2ma(g-a)}{k}}$ である。単振動の中心は、

角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、ばねが $\frac{mg}{k}$ 伸びた位置だから、板から離れた位置は中心から

$$\frac{ma}{k} \text{ である。} x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2 \text{ に代入して } A = \sqrt{\frac{m^2 a^2}{k^2} + \frac{2m^2 a(g-a)}{k^2}} \text{ だから、このとき}$$

の振幅は $\frac{m\sqrt{a(2g-a)}}{k}$ である。