

## 新作問題シリーズ 第23回 ラジウム原子核崩壊

4 次の文章を読んで、下の問いに答えよ。なお、光の速さを  $c$  [m/s] とする。

原子番号の大きい原子は時間とともに放射線を放出しながら別の原子に変化してゆく。これを原子崩壊という。そのような原子の例として、ラジウム ( ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ ) がある。ラジウム原子はアルファ粒子を放出してラドン ( ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ ) となる。核反応方程式は  $\boxed{\text{①}}$  と表すことができる。

それぞれの質量を、ラジウム原子が  $M_1$  [kg]、ラドン原子が  $M_2$  [kg]、アルファ粒子が  $m$  [kg] とすると、生み出される(解放される)核エネルギーの大きさ  $E$  [J] は  $\boxed{\text{②}}$  である。(以降  $E$  を使ってよい)

静止したラジウム原子が崩壊し、ラドン原子が速さ  $V$  [m/s]、アルファ粒子が速さ  $v$  [m/s] で飛び出したとする。このとき運動量保存の法則が成立するので  $\boxed{\text{③}}$  の関係式が得られる。また、エネルギー保存の法則より  $\boxed{\text{④}}$  の関係式が得られる。以上の2式を解くことで、崩壊後の運動エネルギーの大きさは、ラドン原子が  $\boxed{\text{⑤}}$ 、アルファ粒子が  $\boxed{\text{⑥}}$  となる。

このラジウムの原子崩壊の半減期を求める実験をしてみた。最初のラジウムの量が  $W_0$  [kg] であった。時間  $t$  [s] だけ経過したとき、ラジウムの量が  $W_1$  [kg] に減少していた。ラジウムの半減期が  $T$  [s] であるとき、それらの間に成立する関係式は  $\boxed{\text{⑦}}$  である。

- (1) 上の空欄に適切な数式、関係式、反応式を書きなさい。
- (2) 解放された核エネルギーのうち、アルファ粒子の運動エネルギーになるのは何%になるか。
- (3) 半減期  $T$  を  $W_0$ 、 $W_1$ 、 $t$  で表しなさい。
- (4) ラジウムの半減期は  $1.6 \times 10^3$  年である。ラジウムの量が8分の1になるためにはどの程度の期間がかかるのか、その期間を求めなさい。

(1) ラジウム ( ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ ) がある。ラジウム原子は  $\alpha$  粒子を放出してラドン ( ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ ) となる。核反応方程式は  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He} \dots \textcircled{1}$  と表すことができる。また、 ${}^4_2\text{He}$  は  $\alpha$  でも可。

ラジウム原子が  $M_1$  [kg]、ラドン原子が  $M_2$  [kg]、 $\alpha$  粒子が  $m$  [kg]とすると、質量欠損が  $M_1 - M_2 - m$  であるので、生み出される(解放される)核エネルギーの大きさは  $E = (M_1 - M_2 - m)c^2 \dots \textcircled{2}$  になる。静止したラジウム原子が崩壊し、ラドン原子が速さ  $V$  [m/s]、 $\alpha$  粒子が速さ  $v$  [m/s] で飛び出したとする。このとき運動量保存の法則より、

$$0 = M_2 V - m v \dots \textcircled{3}、エネルギー保存の法則より E = \frac{1}{2} M_2 v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \dots \textcircled{4} の関係式$$

が得られる。 $\textcircled{3}$ より、 $\frac{1}{2} M_2 V^2 \cdot M = \frac{1}{2} m v^2 \cdot m \dots \textcircled{3}'$  である。 $\textcircled{3}'$ を $\textcircled{4}$ に代入して、 $v$ を消去・整理すると、ラドン原子の運動エネルギーは  $\frac{1}{2} M_2 v^2 = \frac{m E}{M_2 + m} \dots \textcircled{5}$  である。

同様に、 $V$ を消去するれば、 $\alpha$  粒子の運動エネルギーは  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{M_2 E}{M_2 + m} \dots \textcircled{6}$  となる

最初のラジウムの量が  $W_0$  [kg] であり、時間  $t$  [s] だけ経過したときラジウムの量が  $W_1$  [kg] に減少した。ラジウムの半減期が  $T$  [s] であるとき  $W_1 = W_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \dots \textcircled{7}$  の関係式が成立する。

(2) ラドンの質量は  $M_2 = 222$  u、アルファ粒子の質量は  $m = 4$  u だから、アルファ粒子の運動エネルギーは  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{M_2 E}{M_2 + m} = \frac{222}{(222 + 4)} \times E = 0.98 E$  だから、98% である。

(3)  $W_1 = W_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$  より、両辺対数をとると、 $\log_{10} W_1 = \log_{10} W_0 - \frac{t}{T} \log_{10} 2$  だから、整理して、半減期は  $T = \frac{t \log_{10} 2}{\log_{10} W_0 - \log_{10} W_1}$  である。

(4)  $W_1 = W_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$  に代入して、 $\frac{1}{8} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$  である。 $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$  だから、 $3 = \frac{t}{1600}$  になる。よって、 $t = 4800$  だから、ラジウムの量が 8 分の 1 になるためには 4800 年がかかる。