

新作問題シリーズ 第25回 コンデンサーとコイル(電磁気)

次の文章を読んで下の各問いに答えなさい。なお、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m] とする。

縦 a [m]、横 b [m] の長方形の金属板が2枚ある。この金属板を間隔 d [m] あけて平行に設置した平行板コンデンサーを作った。このコンデンサーの電気容量を C [F] とすると $C = \boxed{\text{①}}$ [F] である(以下、この C を使ってよい)。

[コンデンサー、抵抗、電池の回路] このコンデンサーに抵抗 R [Ω] の抵抗を直列に接続し、スイッチ S を介して内部抵抗を無視できる起電力 V_0 [V] の電池を接続した。はじめは、スイッチ S は開かれており、コンデンサーには電荷が貯まっていなかったとする。

スイッチ S を閉じると、コンデンサーに電流が流れ始め、その直後の電流は $\boxed{\text{②}}$ [A] である。

その後は、時間とともに電流が減少してゆく。コンデンサーに蓄えられている電気量が Q [C] になったとき抵抗にかかっている電圧は $\boxed{\text{③}}$ [V] であるから、抵抗に流れる電流は $\boxed{\text{④}}$ [A] である。

十分時間が経ったとき、コンデンサーに流れる電流はゼロになり、コンデンサーに蓄えられている電気量は $Q_0 = \boxed{\text{⑤}}$ [C]、エネルギーは $\boxed{\text{⑥}}$ [J] になる。

[コンデンサー、コイルの回路] その後、スイッチ S を開き、電池と抵抗を取り除き、自己インダクタンス L [H] のコイルを接続し、スイッチ S を閉じた場合、スイッチ S を閉じた直後の電流は $\boxed{\text{⑦}}$ [A] である。また、コンデンサーに蓄えられている電気量を Q [C] になったとき、コイルに流れる電流は $\boxed{\text{⑧}}$ [A] である。

- (1) 上の文章の空欄に適切な数式を入れなさい。
- (2) [コンデンサー、コイルの回路] の場合、時間が経っても理論的には電流が変動し続ける。このときに流れる電流の様子について簡潔に説明し、スイッチ S を入れたときを時刻 $t=0$ とし、電流の変化を時刻 t の関数で示しなさい。

新作問題シリーズ 第25回 コンデンサーとコイル(電磁気) 解答解説

コンデンサーとコイルの性質についての標準的な問題です。

- (1) 縦 a [m]、横 b [m] の長方形の金属板が2枚ある。この金属板を間隔 d [m] あけて平行に設置した平行板コンデンサーを作った。このコンデンサーの電気容量は $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

$$C = \frac{\epsilon_0 ab}{d} \cdots \textcircled{1} \text{ [F] である(以下、この } C \text{ を使ってよい)}。$$

[コンデンサー、抵抗、電池の回路] このコンデンサーに抵抗 R [Ω] の抵抗を直列に接続し、スイッチ S を介して内部抵抗を無視できる起電力 V_0 [V] の電池を接続した。はじめは、スイッチ S は開かれており、コンデンサーには電荷が貯まっていなかったとする。

スイッチ S を閉じると、コンデンサーに電流が流れ始め、その直後の電流は $\frac{V_0}{R} \cdots \textcircled{2}$ [A] である。その後は、時間とともに電流が減少してゆく。コンデンサーに蓄えられている電気量が Q [C] になったとき、コンデンサーの電圧は $\frac{Q}{C}$ だから、抵抗にかかっている電圧は

$$V_R = V_0 - \frac{Q}{C} \cdots \textcircled{3} \text{ [V] である。オームの法則より、抵抗に流れる電流は}$$

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{CR} \cdots \textcircled{4} \text{ [A] である。}$$

十分時間が経ったとき、コンデンサーに流れる電流はゼロになり、コンデンサーに蓄えられている電気量は $Q_0 = CV_0 \cdots \textcircled{5}$ [C]、エネルギーは $U = \frac{1}{2} CV_0^2 \cdots \textcircled{6}$ [J] になる。

[コンデンサー、コイルの回路] その後、スイッチ S を開き、電池と抵抗を取り除き、自己インダクタンス L [H] のコイルを接続し、スイッチ S を閉じた場合、スイッチ S を閉じた直後の電流は $0 \cdots \textcircled{7}$ [A] である。抵抗がないのでコンデンサー、コイルに蓄えられるエネルギーの和は一定になる。コンデンサーに蓄えられている電気量を Q [C] のとき、

$$\frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 \cdots \text{(a) が成立する。よって、コイルに流れる電流は}$$

$$\sqrt{\frac{CV_0^2}{L} - \frac{Q^2}{CL}} \cdots \textcircled{8} \text{ [A] である。}$$

- (2) この回路は共振回路であり、電流値は単振動する。共振回路の振動数は $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ よ

り、角振動数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ である。(a) より、電流の最大値は $I_0 = \sqrt{\frac{CV_0^2}{L}}$ 、時刻ゼロでの電

流がゼロより $I = I_0 \sin \omega t$ である。よって、時刻 t のときの電流は $I = \sqrt{\frac{CV_0^2}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$ となる。