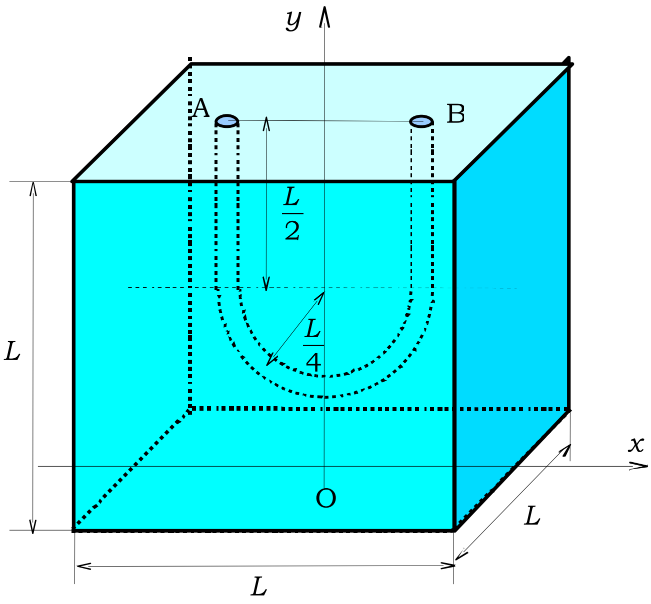
新作問題シリーズ　第26回　ブロックと小球の運動

右の図に示すような立方体のブロックがある。このブロックにはU字型のチューブ状の穴ABがあけられている。チューブ状の穴ABは、長さ $\dfrac{L}{2}$ [m] の直線部と $\dfrac{L}{4}$ [m] の半円部から構成されている。ブロック全体の質量は M [kg] である。

このブロックを水平な床に静かに置き、質量 m [kg] の小球を穴Aから静かに離した。小球は穴Aから鉛直に穴の中を落下し、続いて半円部分を通り、続いて直線部を上り点Bに達する。

なお、小球が穴の中を通過するときの摩擦力、ブロックと床の摩擦力は考えないで良い。また、重力加速度を g [m/s^2] として次の各問いに答えなさい。



問１　小球が穴Aから鉛直に穴の中を落下し半円部に入った直後の速度を求めなさい。

問２　小球が半円部に入った直後にブロックが受けている力を求めなさい。

問３　小球が穴の最下点を通過する時のブロックの速度を求めなさい。

問４　小球が半円部を通過して鉛直部分を上り穴Bに達した時、ブロックはどれだけ移動しているか、求めなさい。

新作問題シリーズ　第26回　ブロックと小球の運動　　解答・解説

問１　この間ではブロックは横向きの力を受けないので、静止したままである。よって、小球についてだけ考えればよい。力学的エネルギー保存の法則より、始めの重力による位置エネルギーが運動エネルギーになるから、 $mg\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{2}mv^2$ より、小球の速度は $\sqrt{gL}$ [m/s] である。

問２　小球は円運動するので、遠心力（公式 $f=\frac{mv^2}{r}$ ）が生じる。円運動の中心は右にあるので遠心力は左向きだから小球はブロックを左向き（x 軸負の向き）に押すことになる。遠心力の公式に代入して $f=m(\sqrt{gL})^2\div\frac{L}{4}=4mg$ となるので、ブロックは $4mg$ で左に押される。

［別解］ 円運動するには向心力が必要。中心は水平右にあるので、穴の壁からの垂直抗力が向心力となるから、 $f=\frac{mv^2}{r}$ の公式より $f=m(\sqrt{gL})^2\div\frac{L}{4}=4mg$ である。よって、その反作用の力がブロックにかかる。よって、ブロックは $4mg$ で左に押される。

問３　小球が最下点を通過するときの小球の速度 v [m/s]、ブロックの速度 V [m/s] とする。

摩擦が働かないので力学的エネルギー保存の法則 $mg\cdot\frac{3}{4}L=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2$ ･･･① が成立する。また、水平方向に外力が働かないので運動量保存の法則 $0=mv+MV$ ･･･② も成立する。①より $v=-\frac{MV}{m}$ を②に代入して $\frac{3}{4}mgL=\frac{1}{2}m\left(-\frac{MV}{m}\right)^2+\frac{1}{2}MV^2$ だから、これを整理して $3m^2gL=2M(m+M)V^2$ になる。よって、 $V=\pm\sqrt{\frac{3m^2gL}{2M(m+M)}}$ となり、穴の最下点を小球が通過するときのブロックの速度は $V=\sqrt{\frac{3m^2gL}{2M(m+M)}}$ （AからBに行くときは左向き、BからAに行くときは右向き）である。

［参考］ 小球の速度は $v=\mp\sqrt{\frac{3MgL}{2(m+M)}}$ （ブロックと逆向き）である。

問４　**「水平方向の外力が働かないので小球とブロックの重心位置は変わらない」** ことを使えばよい。重心の公式 $x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+M_2}$ だから、小球がAにあるときの小球とブロックの合わせた重心位置は $x_G=-\frac{mL}{4(m+M)}$ [m] である。小球がBにあるとき、ブロックの位置を x_0 [m] とすると、小球の位置は $x_0+\frac{L}{4}$ [m] になる。合わせた重心は $x_G{}'=\frac{m\times\left(x_0+\frac{L}{4}\right)+M\times x_0}{m+M}$ より $x_G{}'=\frac{m(4x_0+L)+4Mx_0}{4(m+M)}$ である。よって、重心位置が変化しないのだから、

$-\frac{mL}{4(m+M)}=\frac{m(4x_0+L)+4Mx_0}{4(m+M)}$ が成立する。整理すると $x_0=-\frac{mL}{2(m+M)}$ だから、ブロックの位置は左に $\frac{mL}{2(m+M)}$ [m] にずれることが分かる。

※　このときのブロックの運動は振動運動ですが、単振動ではありません。鉛直部分を動いている間は、ブロックが受ける復元力がゼロだからです。（単振動では「復元力は変位に比例する」のです！）